ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1°

Α. ΣΕΛ. 30 Σχολικού Βιβλίου
Β. **α**. ΣΕΛ. 142 Σχολικού Βιβλίου
β. ΣΕΛ. 16 Σχολικού Βιβλίου
Γ. **α**. Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος

ΘΕΜΑ 2°

α) Έχουμε : $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu_5=50 \Leftrightarrow$
$\alpha+4+5\alpha+8+4\alpha+\alpha-1+2\alpha=50 \Leftrightarrow$
$13\alpha+11=50 \Leftrightarrow$
$13\alpha=39 \Leftrightarrow \alpha=3$

β) Για α=3 ο πίνακας γίνεται:

Αριθμός Βιβλίων x_i	Αριθμός Μαθητών ν_i
0	7
1	23
2	12
3	2
4	6
ΣΥΝΟΛΟ	50

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i\cdot \nu_i}{50}=\frac{0\cdot 7+1\cdot 23+2\cdot 12+3\cdot 2+4\cdot 6}{50}=\frac{77}{50}=1,54 \text{ βιβλία}$$

γ) Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων

Άρα $\delta=\frac{x_{25}+x_{26}}{2}=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1$ βιβλίο

δ) Έστω Α το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει διαβάσει τουλάχιστο 3 βιβλία.

$N(A)=2+6=8$ και $N(\Omega)=50$ οπότε

$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{8}{50}=0,16$ ή 16%

ή (άλλος τρόπος)

$P(A)=f_4\%+f_5\%$ με $f_4\%=\frac{2}{50}\cdot 100=4$ και $f_5\%=\frac{6}{50}\cdot 100=12$

δηλ. $P(A) = 16\%$

ΘΕΜΑ 3°

α) Το πλήθος των μελών του συλλόγου που συμμετέχουν στο χορευτικό είναι $N(\Omega) = (x+4)^2 + x > 0$ αφού $x > 0$

Ορίζουμε Α το ενδεχόμενο να επιλέξουμε τυχαία αγόρι , οπότε Α′ είναι το ενδεχόμενο να επιλέξουμε τυχαία κορίτσι

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{x}{(x+4)^2 + x} = f(x) \quad x > 0 \quad (x \in N)$$

Ως συνάρτηση του x η πιθανότητα να επιλέξουμε αγόρι είναι $f(x) = \dfrac{x}{(x+4)^2 + x}$

β) Έστω

$$f(x) = \frac{1}{19} \overset{a)}{<=>} \frac{x}{(x+4)^2 + x} = \frac{1}{19} <=> 19x = (x+4)^2 + x <=>$$

$$19x = x^2 + 8x + 16 + x <=> x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$\Delta = 100 - 64 = 36$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm 6}{2} \quad \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Υπολογίζουμε το πλήθος των μελών του συλλόγου για $x = 8$

$N(\Omega) = (8+4)^2 + 8 = 152 > 100$ Άρα η τιμή $x = 8$ απορρίπτεται (από υπόθεση).

Ενώ για $x = 2, N(\Omega) = (2+4)^2 + 2 = 38 < 100$

Άρα ο αριθμός των μελών του συλλόγου είναι 38 και η πιθανότητα να επιλέξουμε κορίτσι είναι $P(A') = 1 - \dfrac{1}{19} = \dfrac{18}{19}$

γ) $f(x) = \dfrac{x}{(x+4)^2 + x} = \dfrac{x}{x^2 + 9x + 16}$ οπότε παραγωγίζοντας έχουμε

$$f'(x) = \frac{x^2 + 9x + 16 - 2x^2 - 9x}{(x^2 + 9x + 16)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{-x^2 + 16}{(x^2 + 9x + 16)^2}$$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow (4 + x)(4 - x) = 0$

Άρα $x = 4$ ή $x = -4$ (απορρίπτεται)

Το πρόσημο της $f'(x)$ φαίνεται στο παρακάτω πίνακα:

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Άρα η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι μεγιστοποιείται για x=4.

Η τιμή της πιθανότητας αυτής είναι $f(4)=\dfrac{4}{68}=\dfrac{1}{17}$

ΘΕΜΑ 4^{o}

$f(x)=-2x^2+\kappa x+4\sqrt{x}+10\,,\ x\geq 0$

α. $f(1)=-2\cdot 1^2+\kappa\cdot 1+4\cdot\sqrt{1}+10=\kappa+12$ (1)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με παράγωγο

$f'(x)=-4x+\kappa+\dfrac{4}{2\sqrt{x}}=-4x+\kappa+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$, οπότε: $f'(1)=-4+\kappa+2=\kappa-2$, (2).

Αφού η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον x΄x θα ισχύει

$f'(1)=0\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\kappa-2=0\Leftrightarrow\kappa=2$, (3)

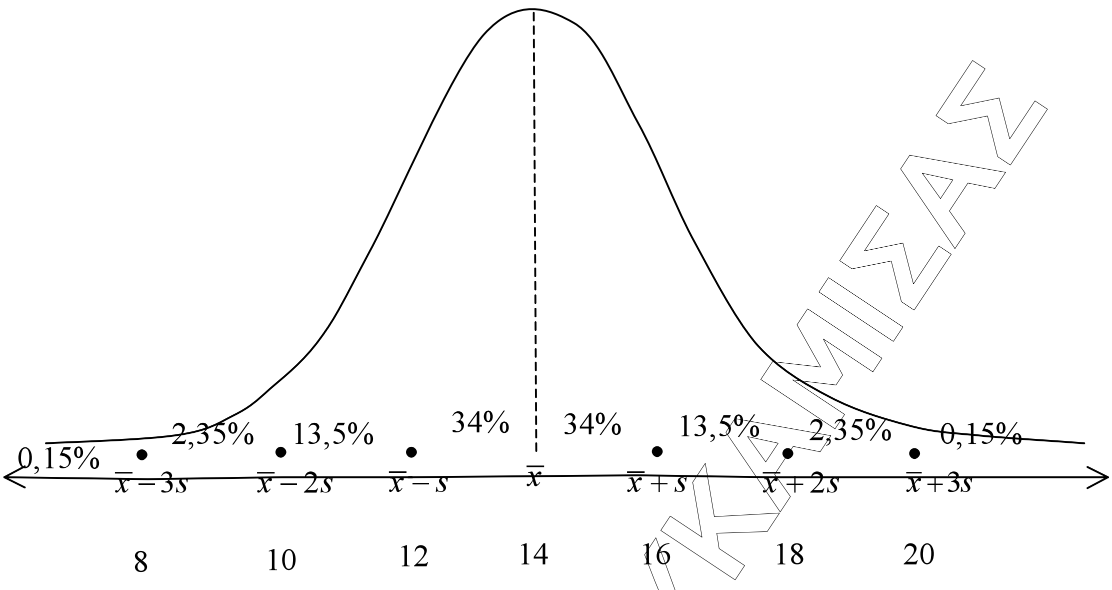
Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι (ε): y = αx+β με $\alpha=f'(1)=0$, οπότε η εξίσωση γράφεται (ε): y = β. Όμως $A\in(\varepsilon)$, άρα

$y=f(1)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}y=\kappa+12\overset{(3)}{\Leftrightarrow}y=14$.

β. Είναι (από α ερώτημα) f(1) = 14 και

$f'(x)=-4x+2+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\overset{x=4}{\Leftrightarrow}f'(4)=-16+2+1\Leftrightarrow f'(4)=-13$. Άρα $s=-\dfrac{2\cdot(-13)}{13}=2$

και $\bar{x}=14$.



Έτσι είναι $\bar{x}\text{-}s = 12$, $\bar{x}\text{-}2s = 10$, $\bar{x}\text{-}3s = 8$, $\bar{x}+s = 16$, $\bar{x}+2s = 18$, $\bar{x}+3s = 20$. Άρα αφού 3 π αρατηρήσεις του δείγματος είναι μικρότερες ή ίσες του 8, το ποσοστό που αντιστοιχεί σ′ αυτές είναι $\dfrac{100-99,7}{2}\ \% = 0,15\%$.

Οπότε $\dfrac{0,15}{100}\cdot v = 3 \Leftrightarrow v = \dfrac{300}{0,15} = 2000$ παρατηρήσεις (μέγεθος του δείγματος).

i) Το διάστημα (10,16) είναι το $(\bar{x}\text{-}2s\,,\ \bar{x}+s)$ οπότε σ΄ αυτό αντιστοιχεί ποσοστό: $68\% + \dfrac{95\text{-}68}{2}\% = 68\% + 13,5\% = 81,5\%$.

Έτσι ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι $\dfrac{81,5}{100}\cdot 2000 = 20\cdot 81,5 = 1630$

ii) $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{2}{14} = \dfrac{1}{7} > \dfrac{1}{10} = 0,1$ οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Για να είναι ομοιογενές το δείγμα θα πρέπει για τον νέο συντελεστή CV′ του δείγματος να ισχύει $CV' \le 0,1$. Αν x_i' είναι οι νέες παρατηρήσεις θα ισχύει $x_i' = x_i + \alpha$, α>0 i = 1,2,…,2000. Οπότε για την νέα μέση τιμή $\bar{x}'$ και τυπική απόκλιση s΄ θα ισχύουν:

$\bar{x}' = \bar{x}+\alpha = 14+\alpha$ και $s' = |1|s = s = 2$. Έτσι $CV' = \dfrac{s'}{\bar{x}'} = \dfrac{2}{14+\alpha}$.

Πρέπει: $\frac{2}{14+\alpha} \leq 0{,}1 \Leftrightarrow 2 \leq 1{,}4+0{,}1\alpha \Leftrightarrow 0{,}1\alpha \geq 0{,}6 \Leftrightarrow \alpha \geq 6$.

Δηλαδή, η μικρότερη τιμή της παραμέτρου α που πρέπει να προστεθεί, είναι α = 6.