ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΕ

ΘΕΜΑ 1^o

α) Είναι CV = 20% , δηλ. $\frac{s}{\overline{x}} = 0,2 \Leftrightarrow \frac{4}{\overline{x}} = 0,2 \Leftrightarrow \overline{x} = \frac{4}{0,2} = 20$

β) Είναι :

$$\overline{x} = \frac{16+14+22+18+(20+\alpha)}{5} \Leftrightarrow 5\overline{x} = 90+\alpha \overset{\alpha)}{\Leftrightarrow} 5\cdot 20 = 90+\alpha \Leftrightarrow \alpha = 10$$

γ) Για α = 10 οι παρατηρήσεις είναι : 16, 14, 22, 18, 30

και σε αύξουσα σειρά : 14, 16, 18, 22, 30.

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι πέντε. Άρα η διάμεσος είναι η τρίτη παρατήρηση δηλαδή δ = 18.

δ) Αφού CV = 20% > 10% , το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 2^o

α) $f(x) = 4x^3 - 12x + 2006, \ \ x \in \mathbb{R}$
Οπότε η παράγουσα της f είναι η παραγωγίσιμη συνάρτηση
$F(x) = x^4 - 6x^2 + 2006x + c, \ \ c \in \mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ο ρυθμός μεταβολής της f, είναι η $f'(x) = 12x^2 - 12$ (αφού η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική).

γ) Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$ και
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 12(x^2-1) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
Οπότε:

- f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$
- f γνησίως φθίνουσα στο [-1,1] και
- f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. (Τα παραπάνω διαστήματα είναι κλειστά στα $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ αφού η f συνεχής στο $\mathbb{R}$)

ΘΕΜΑ 3^o

α) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2}\cdot \alpha = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{(x+2)(x-2)\alpha}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+}(x+2)\alpha = 4\alpha$.

β) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(\alpha x + \beta) = 2\alpha + \beta$.

γ) Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 2$ πρέπει $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

δηλ. $4\alpha = 4 = 2\alpha + \beta \Leftrightarrow \alpha = 1, \beta = 2$.

δ) Για τις παραπάνω τιμές των α, β η f γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , \ x > 2 \\ 4 & , \ x = 2 \\ x+2 & , \ x < 2 \end{cases}$$

Έχουμε $0 \in (-\infty, 2)$ οπότε f(0) = 0 + 2 = 2.

και $3 \in (2, +\infty)$ οπότε $f(3) = \dfrac{3^2-4}{3-2} = 5$

ΘΕΜΑ 4^{o}

α) Αν υ το ύψος του τριγώνου που αντιστοιχεί στην βάση x, με x >0 τότε

$\upsilon + x = 50 \Leftrightarrow \upsilon = 50 - x \quad (1)$ με

$\upsilon > 0 \Leftrightarrow 50 - x > 0 \Leftrightarrow x < 50$

Το εμβαδόν κάθε πλακιδίου δίνεται από την σχέση :

$E = \dfrac{1}{2} x \cdot \upsilon$ οπότε $E(x) \overset{(1)}{=} \dfrac{1}{2} x \cdot (50 - x), \ \ 0 < x < 50$ (x σε cm)

Η E(x) είναι παραγωγίσιμη στο (0,50) με :

$$E'(x) = \left(\frac{1}{2}50x - \frac{1}{2}x^2\right)' = \left(25x - \frac{1}{2}x^2\right)' = 25 - x.$$

Είναι $E'(x) = 0 \Leftrightarrow 25 - x = 0 \Leftrightarrow x = 25$

και: $\begin{cases} E'(x) > 0 \Leftrightarrow 25 - x > 0 \Leftrightarrow x < 25 \\ E'(x) < 0 \Leftrightarrow 25 - x < 0 \Leftrightarrow x > 25 \end{cases}$

Ο πίνακας μεταβολών της E(x) είναι :

x	0		25		50
E΄(x)		+	0	-	
E(x)		↗	max	↘	

Δηλαδή Ε(x) γίνεται μέγιστο, όταν $x = 25cm$.

γ) Η μέγιστη τιμή του Ε(x) είναι : $E(25) = \frac{1}{2}25(50 - 25) = \frac{625}{2} = 312,5cm^2$.