ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Θεωρία σχολ. βιβλίου σελ. 98.
Α2. Θεωρία σχολ. βιβλίου σελ. 141.
Α3. Θεωρία σχολ. βιβλίου σελ. 280.

Β. **α.** Λ
β. Λ
γ. Λ
δ. Σ
ε. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι $z=\dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Οπότε $|z|=\left|\dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}\right|=\dfrac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|}=\dfrac{\sqrt{4+\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+4}}=1$

άρα οι εικόνες M(z) ανήκουν σε κύκλο κέντρου O(0,0) και ακτίνας $\rho=1$.

β. Για $\alpha=0$ είναι $z_1=\dfrac{2}{2i}=\dfrac{i}{i^2}=-i$.

Για $\alpha=2$ είναι $z_2=\dfrac{2+2i}{2+2i}=1$.

i) Αν Α η εικόνα του z_1 και Β η εικόνα του z_2 τότε η απόστασή τους $(AB)=|z_1-z_2|=|-i-1|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

ii) $(z_1)^{2\nu}=(-i)^{2\nu}=(i^2)^{\nu}=(-1)^{\nu}$

$(-z_2)^{\nu}=(-1)^{\nu}$. Άρα $(z_1)^{2\nu}=(-z_2)^{\nu}$

ΘΕΜΑ 3ο

$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$, $\theta \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγισίμων με

$f'(x) = \left(x^3\right)' - (3x)' - \left(2\eta\mu^2\theta\right)' = 3x^2 - 3$.

Θέτουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x \pm 1$.

Ο πίνακας μεταβολών της f και προσήμου της f' είναι:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f		↗		↘		↗	

Έτσι η συνάρτηση f:

- είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$, αφού είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(-\infty,-1)$.
- είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$, αφού είναι συνεχής στο $[-1,1]$και ισχύει $f'(x) < 0$ στο $(-1,1)$.
- είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(1,+\infty)$.

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -1$ το

$f(-1) = -1 + 3 - 2\eta\mu^2\theta = 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2(1 - \eta\mu^2\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$,

τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 1$ το

$f(1) = 1 - 3 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta = -2(1 + \eta\mu^2\theta)$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγισίμων με

$\left(f'(x)\right)' = f''(x) = 6x$.

Θέτουμε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Έτσι η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$ ως συνεχής και κυρτή στο $[0,+\infty)$ ως συνεχής. Παρουσιάζει σημείο καμπής (μοναδικό) στο $x_3 = 0$ το

$f(0) = -2\eta\mu^2\theta$.

Ακόμη

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt}{x^5} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt\right)'}{\left(x^5\right)'} =$$

Αφού η $\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt$ παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγισίμων x^2 με την $\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{2x\eta\mu x^4}{5x^4} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{5}x\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x^4}{x^4} = \frac{2}{5}\cdot 0\cdot 1 = 0$$

διότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x^4}{x^4} = 1$,

αφού για $y = x^4$ είναι $\lim\limits_{y\to o^+}\dfrac{\eta\mu y}{y} = 1$ και $x\to 0^+ \Leftrightarrow y\to 0^+$.

Οπότε το αρχικό όριο έχει τιμή μηδέν.