

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ 1°

- A1.** Θεωρία σχολ. βιβλίου σελ. 98.
A2. Θεωρία σχολ. βιβλίου σελ. 141.
A3. Θεωρία σχολ. βιβλίου σελ. 280.

- B.** α. Λ
β. Λ
γ. Λ
δ. Σ
ε. Σ

ΘΕΜΑ 2°

- α.** Είναι $z = \frac{2 + ai}{a + 2i}$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{Οπότε } |z| = \left| \frac{2 + ai}{a + 2i} \right| = \frac{|2 + ai|}{|a + 2i|} = \frac{\sqrt{4 + a^2}}{\sqrt{a^2 + 4}} = 1$$

άρα οι εικόνες $M(z)$ ανήκουν σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho = 1$.

- β.** Για $a = 0$ είναι $z_1 = \frac{2}{2i} = \frac{i}{i^2} = -i$.

$$\text{Για } a = 2 \text{ είναι } z_2 = \frac{2 + 2i}{2 + 2i} = 1.$$

- i)** Αν A η εικόνα του z_1 και B η εικόνα του z_2 τότε η απόστασή τους

$$(AB) = |z_1 - z_2| = |-i - 1| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

- ii)** $(z_1)^{2\nu} = (-i)^{2\nu} = (i^2)^\nu = (-1)^\nu$

$$(-z_2)^\nu = (-1)^\nu. \text{ Άρα } (z_1)^{2\nu} = (-z_2)^\nu$$

ΘΕΜΑ 3°

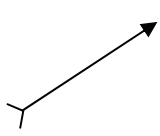
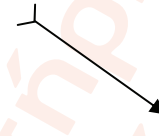
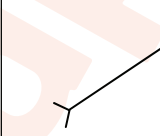
$$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta, \theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πράξεις παραγωγισίμων με

$$f'(x) = (x^3)' - (3x)' - (2\eta\mu^2\theta)' = 3x^2 - 3.$$

$$\text{Θέτουμε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x \pm 1.$$

Ο πίνακας μεταβολών της f και προσήμου της f' είναι:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f					

Έτσι η συνάρτηση f :

- είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$, αφού είναι συνεχής στο $(-\infty, -1]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, -1)$.
- είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$, αφού είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και ισχύει $f'(x) < 0$ στο $(-1, 1)$.
- είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(1, +\infty)$.

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -1$ το

$$f(-1) = -1 + 3 - 2\eta\mu^2\theta = 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2(1 - \eta\mu^2\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta,$$

τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 1$ το

$$f(1) = 1 - 3 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta = -2(1 + \eta\mu^2\theta).$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πράξεις παραγωγισίμων με

$$(f'(x))' = f''(x) = 6x.$$

Θέτουμε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Έτσι η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ ως συνεχής και κυρτή στο $[0, +\infty)$ ως συνεχής. Παρουσιάζει σημείο καμπής (μοναδικό) στο $x_3 = 0$ το

$$f(0) = -2\eta\mu^2\theta.$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt}{x^5} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt\right)'}{(x^5)'} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x\eta\mu x^4}{5x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{5} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x^4}{x^4} = \frac{2}{5} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x^4}{x^4} = 1,$

αφού για $y = x^4$ είναι $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu y}{y} = 1$ και $x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow y \rightarrow 0^+.$

Οπότε το αρχικό όριο έχει τιμή μηδέν.

Αφού η $\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt$
παραγωγίσιμη ως σύνθεση
των παραγωγίσιμων x^2 με
την $\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt$



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΠΟΥΚΑΜΠΙΟ