ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β΄ ΚΥΚΛΟΥ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2007

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

α) $\kappa_1 = \frac{2+4}{2} = 3$, $\kappa_2 = \frac{4+6}{2} = 5$, $\kappa_3 = \frac{6+8}{2} = 7$, $\kappa_4 = \frac{8+10}{2} = 9$,

$\kappa_5 = \frac{10+12}{2} = 11$

$\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 6$, $\nu_3 = 8$, $\nu_4 = 5$, $\nu_5 = 3$

$\nu_1\kappa_1 = 3 \cdot 3 = 9$, $\nu_2\kappa_2 = 6 \cdot 5 = 30$, $\nu_3\kappa_3 = 8 \cdot 7 = 56$, $\nu_4\kappa_4 = 5 \cdot 9 = 45$,

$\nu_5\kappa_5 = 3 \cdot 11 = 33$

$f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu} \cdot 100$ για $i = 1,2,3,4,5$

$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = 3 + 6 + 8 + 5 + 3 = 25$.

Έτσι $f_1\% = \frac{\nu_1}{\nu} \cdot 100 = \frac{3}{25} \cdot 100 = 12\%$

$f_2\% = \frac{\nu_2}{\nu} \cdot 100 = \frac{6}{25} \cdot 100 = 24\%$

$f_3\% = \frac{\nu_3}{\nu} \cdot 100 = \frac{8}{25} \cdot 100 = 32\%$

$f_4\% = \frac{\nu_4}{\nu} \cdot 100 = \frac{5}{25} \cdot 100 = 20\%$

$f_5\% = \frac{\nu_5}{\nu} \cdot 100 = \frac{3}{25} \cdot 100 = 12\%$

$F_1\% = f_1\% = 12\%$

$F_2\% = f_1\% + f_2\% = 12\% + 24\% = 36\%$

$F_3\% = 12\% + 24\% + 32\% = 68\%$

$F_4\% = 12\% + 24\% + 32\% + 20\% = 88\%$

$F_5\% = 12\% + 24\% + 32\% + 20\% + 12\% = 100\%$

Οπότε ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Διάστημα	Συχνότητα ν_i	Μέσο διαστήματος K_i	$\nu_i K_i$	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Σχετική αθροιστική συχνότητα $F_i\%$
$[2,4)$	3	3	9	12	12
$[4,6)$	6	5	30	24	36
$[6,8)$	8	7	56	32	68
$[8,10)$	5	9	45	20	88
$[10,12)$	3	11	33	12	100
Αθροίσματα	25		173	100	

β) Είναι $\bar{t} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} \nu_i K_i}{\nu} = \dfrac{173}{25} = 6,92\,\text{min}$

γ) Τουλάχιστον 6 min καθυστέρηση είχαν:
$\nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = 8 + 5 + 3 = 16$ δρομολόγια.

δ) Το ποσοστό των δρομολογίων που είχαν καθυστέρηση λιγότερο από 8 min είναι:
$f_1\% + f_2\% + f_3\% = F_3\% = 68\%$.

ΘΕΜΑ 2^o

α) Για $x < 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x-1)(x-3)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0^-}(x-3) = -3$$

β) Για $x > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(e^x - \alpha) = e^0 - \alpha = 1 - \alpha$$

γ) Για να υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ πρέπει:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ άρα $-3 = 1 - \alpha$ δηλ. $-4 = -\alpha$ ή $\alpha = 4$.

δ) Για να είναι η f συνεχής στο $x = 0$ πρέπει

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$.

Άρα $1 - \alpha = -3 = -3 + \beta$ και επειδή $\alpha = 4$ έχουμε:

$1 - 4 = -3 = -3 + \beta$ δηλαδή $-3 + \beta = -3$ ή $\beta = 0$

ΘΕΜΑ 3ο

$f(x) = x^2 + \kappa x + \lambda$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) $A \in C_f$ άρα $f(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 + \kappa \cdot 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \kappa + \lambda = -1$ (1).
Η f έχει στο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο, άρα θα ισχύει $f'(1) = 0$. Όμως $f'(x) = (x^2 + \kappa x + \lambda)' = (x^2)' + (\kappa x)' + \lambda' = 2x + \kappa$ (αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική).
Έτσι $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 + \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = -2$ (2)
Η (1) λόγω της (2) γίνεται $-2 + \lambda = -1 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

β) Για $\kappa = -2$, $\lambda = 1$ η f έχει τύπο $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
Είναι $f'(x) = 2x - 2$ που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\left((f'(x)\right)' = f''(x) = (2x - 2)' = (2x)' - 2' = 2$.

γ) Είναι $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $f'(x) = 2x - 2$, $f''(x) = 2$.
Οπότε:
$f(x) + f'(x) + f''(x) = (x^2 - 2x + 1) + (2x - 2) + 2 =$
$= x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 + 2 = x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $x^2 \geq 0$

ΘΕΜΑ 4ο

α) $f(x) = 10\ell nx - 5x^2$, $x > 0$
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων $\left(10\ell nx, 5x^2\right)$ με

$$f'(x) = \left(10\ell nx - 5x^2\right)' = \left(10\ell nx\right)' - \left(5x^2\right)' =$$

$$= 10\left(\ell nx\right)' - 5\left(x^2\right)' = 10 \cdot \frac{1}{x} - 5(2x) =$$

$$= \frac{10}{x} - 10x = 10\left(\frac{1}{x} - x\right) = 10\left(\frac{1 - x^2}{x}\right)$$

β) Θέτουμε $f'(x) = 0$ για $x > 0$ και έχουμε ισοδύναμα

$10\left(\frac{1 - x^2}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x \pm 1$ με την $x = -1$ να απορρίπτεται.

Ο πίνακας μεταβολών της f και προσήμου της f' είναι:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ (αφού είναι συνεχής σ' αυτά)

γ) Είναι $f(1)=10\cdot\ell n1-5\cdot 1^2=10\cdot 0-5=-5$

- Για κάθε $0<x<1$ είναι $f(x)<f(1)=-5$ (αφού f γνησίως αύξουσα)
- Για κάθε $x>1$ είναι $f(x)<f(1)=-5$ (αφού f γνησίως φθίνουσα)

Έτσι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=1$ το $f(1)=-5$

δ) Αφού η f έχει το $f(1)=-5$ ως ολικό μέγιστο θα ισχύει:

$f(x)\le f(1)=-5$ για κάθε $x>0$