ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2008
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 28
Β. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 96
Γ. α. (Λ), β. (Λ), γ. (Σ), δ. (Σ), ε. (Σ)

ΘΕΜΑ 2^{ο}

α. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e^x\frac{x-1}{e^x}}{x^2-1}\overset{e^x>0}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με:

$$f'(x)=\left(\frac{x-1}{e^x}\right)'=\frac{(x-1)'e^x-(x-1)(e^x)'}{(e^x)^2}=\frac{e^x-(x-1)e^x}{e^{2x}}=$$

$$\frac{e^x(1-x+1)}{e^{2x}}\overset{e^x>0}{=}\frac{2-x}{e^x}.$$

Επομένως: $e^x f'(x)=e^x\frac{2-x}{e^x}\overset{e^x>0}{=}2-x$

γ. Θέτουμε για $x\in\mathbb{R}: f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2-x}{e^x}=0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}2-x=0\Leftrightarrow x=2$

Λύνουμε την ανίσωση: $f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{2-x}{e^x}>0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}2-x>0\Leftrightarrow x<2$ και την ανίσωση: $f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{2-x}{e^x}<0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}2-x<0\Leftrightarrow x>2$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ 2]$, γνησίως φθίνουσα στο $[2,\ +\infty)$, άρα παρουσιάζει μέγιστο (ολικό) για $x=2$ το $f(2)=\frac{2-1}{e^2}=\frac{1}{e^2}$.

ΘΕΜΑ 3^{ο}

α. Για τη μέση τιμή ισχύει ο τύπος: $\bar{x}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i$

Η μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α, είναι:

$\overline{x_A}=\frac{20+26+24+22+18}{5}=\frac{110}{5}=22$ χιλιάδες ώρες.

Η μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου Β, είναι:

$\overline{x_B}=\frac{26+32+19+20+23}{5}=\frac{120}{5}=24$ χιλιάδες ώρες.

β. Θεωρούμε Κ το μέσο κόστος ανά χίλιες ώρες. Άρα έχουμε για τον τύπο Α:
$K_A = \frac{38}{\overline{x}_A} = \frac{38}{22} = \frac{19}{11}$ ευρώ ανά χίλιες ώρες και

για τον τύπο Β: $K_B = \frac{40}{\overline{x}_B} = \frac{40}{24} = \frac{5}{3}$ ευρώ ανά χίλιες ώρες.

Αλλά $\frac{K_A}{K_B} = \frac{\frac{19}{11}}{\frac{5}{3}} = \frac{57}{55} > 1$, άρα $\frac{K_A}{K_B} > 1 \Leftrightarrow K_A > K_B$, επομένως συμφέρει να αγοράσουμε μπαταρίες τύπου Β αφού κοστίζουν λιγότερο.

γ. Για τη διακύμανση ισχύει ο τύπος:
$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ και η τυπική απόκλιση δίνεται ως $s = \sqrt{s^2}$

Για τη μπαταρία τύπου Α είναι:

$$s_A^2 = \frac{(20-22)^2 + (26-22)^2 + (24-22)^2 + (22-22)^2 + (18-22)^2}{5}$$

$$= \frac{4+16+4+0+16}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

Οπότε $s_A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ χιλιάδες ώρες.

Για τη μπαταρία τύπου Β είναι:

$$s_B^2 = \frac{(26-24)^2 + (32-24)^2 + (19-24)^2 + (20-24)^2 + (23-24)^2}{5}$$

$$= \frac{4+64+25+16+1}{5} = \frac{110}{5} = 22$$

Οπότε $s_B = \sqrt{22}$ χιλιάδες ώρες.

δ. Μεγαλύτερη ομοιογένεια έχει το δείγμα με το μικρότερο CV (συντελεστής μεταβολής)

Για τον συντελεστή μεταβολής ισχύει ο τύπος: $CV = \frac{s}{\overline{x}}$ $\left(\overline{x} > 0\right)$

Συνεπώς $CV_A = \frac{s_A}{\overline{x}_A} = \frac{2\sqrt{2}}{22} = \frac{\sqrt{2}}{11}$ και $CV_B = \frac{s_B}{\overline{x}_B} = \frac{\sqrt{22}}{24} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{11}}{24}$

Είναι: $\frac{CV_A}{CV_B} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{11}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{11}}{24}} = \frac{24}{\sqrt{11}\cdot 11} \cong \frac{24}{36{,}3} < 1$

Άρα $CV_A < CB_B$. Συνεπώς μεγαλύτερη ομοιογένεια έχει το δείγμα Α.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω A το ενδεχόμενο:

«Ο κάτοικος της πόλης διαβάζει την εφημερίδα α»

B το ενδεχόμενο:

«ο κάτοικος της πόλης διαβάζει την εφημερίδα β».

Άρα το ενδεχόμενο «ο κάτοικος διαβάζει την εφημερίδα α και όχι την β»είναι $A-B$ ή $A\cap B'$. Συνεπώς από τα δεδομένα έχουμε:

$$P(A)=\frac{50}{100}=0,5 \text{ και } P(A-B)=\frac{30}{100}=0,3$$

Το ενδεχόμενο «ο κάτοικος να μη διαβάζει την εφημερίδα α ή διαβάζει τη β»είναι το $A'\cup B$ άρα

$$P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-P(B\cap A')=1-P(A)+P(B)-\big(P(B)-P(A\cap B)\big)$$

$$=1-P(A)+P(A\cap B)=1-\big[P(A)-P(A\cap B)\big]=1-0,3=0,7 \text{ ή } 70\%$$

β. Είναι

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cup B)=P(B)+P(A-B)=$$

$$=P(B)+0,3 \quad (1)$$

Όμως $P(A\cup B)\le 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} P(B)+0,3\le 1\Leftrightarrow P(B)\le 0,7\Leftrightarrow P(B)\le \frac{7}{10}$

Επιπλέον από ερώτημα (α)

έχουμε: $P(A)-P(A\cap B)=0,3\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)-0,3=0,5-0,3=0,2$

Όμως $A\cap B\subseteq B$, άρα $P(A\cap B)\le P(B)\Leftrightarrow 0,2\le P(B)\Leftrightarrow \frac{1}{5}\le P(B)$

Τελικά $\frac{1}{5}\le P(B)\le \frac{7}{10}$

γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική με $f'(x)=3x^2-x+P(B)$.

Η διακρίνουσα της f' είναι $\Delta=1-12P(B)$

Όμως από το ερώτημα β έχουμε:

$$\frac{1}{5}\le P(B)\le \frac{7}{10}\Leftrightarrow -12\cdot\frac{1}{5}\ge -12P(B)\ge -12\cdot\frac{7}{10}\Leftrightarrow 1-\frac{12}{5}\ge \Delta\ge 1-\frac{84}{10}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{5}\ge \Delta\ge -\frac{74}{10} \text{ ή}$$

$$-\frac{74}{10}\le \Delta\le -\frac{7}{5}<0$$

Άρα $\Delta<0$, οπότε η f' διατηρεί πρόσημο, όμοιο με του α=1>0 άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,οπότε δεν παρουσιάζει ακρότατα σε αυτό.