ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2008
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 235

Α2. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελ. 191

Β. α. (Σ) **β.** (Σ) **γ.** (Λ) **δ.** (Λ) **ε.** (Σ)

ΘΕΜΑ 2ο

α. $\left|\left(i+2\sqrt{2}\right)z\right|=6 \Leftrightarrow \left|i+2\sqrt{2}\right||z|=6 \Leftrightarrow \sqrt{8+1}|z|=6 \Leftrightarrow 3|z|=6 \Leftrightarrow |z|=2$,

επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων Α των μιγαδικών z είναι κύκλος C με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=2.

β. $|w-(1-i)|=|w-(3-3i)|$. Αν $w=x+yi$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ τότε:

$$|(x+yi)-(1-i)|=|(x+yi)-(3-3i)| \Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i|=|(x-3)+(y+3)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=(x-3)^2+(y+3)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1=x^2-6x+9+y^2+6y+9 \Leftrightarrow 4x-4y-16=0$$

$$\Leftrightarrow x-y-4=0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι ευθεία (ε) με εξίσωση $x-y-4=0$

γ. Το $|w|$ είναι η απόσταση της εικόνας Μ του w από το Ο(0,0). Οπότε,

$\min|w|=d\left(O,(\varepsilon)\right)=\dfrac{|o-o-4|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$, αφού για κάθε σημείο $N\in(\varepsilon)$ με $N \not\equiv M$ ισχύει (ΟΝ)>(ΟΜ).

δ. Το $|z-w|$ είναι η απόσταση των εικόνων Α, Μ των μιγαδικών z και w αντιστοίχως. Είναι $d\left(O,\ (\varepsilon)\right)$ >ρ=2 (όπου ρ η ακτίνα του κύκλου του ερωτήματος α) άρα η (ε) δεν τέμνει τον κύκλο C, επομένως: $\min|z-w|=d\left(O,\ (\varepsilon)\right)-\rho=2\sqrt{2}-2$, αφού (ΒΜ)$\leq$(ΑΜ) για κάθε $A\in C$ και Β το σημείο τομής της ΟΜ με τον C

ΘΕΜΑ 3ο

α. Για $x>0$ είναι:

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(x\ln x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)}\underset{D.L'H}{\overset{\frac{(-\infty)}{(+\infty)}}{=}}\lim_{x\to0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\left(-\frac{x^2}{x}\right)=\lim_{x\to0}(-x)=0$$

Ισχύει $f(0)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$, επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

β. Για $x>0$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=(x\ln x)'=x'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1.$$

Θέτουμε

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow \ln x=\ln e^{-1} \overset{\ln x:"1-1"}{\Leftrightarrow} x=e^{-1}=\frac{1}{e}\in(0,\ +\infty).$$

Λύνουμε την ανίσωση:

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x+1>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow \ln x>\ln e^{-1} \overset{\substack{\ln x:\ \text{γνησίως}\\ \text{αύξουσα}}}{\Leftrightarrow} x>e^{-1} \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$$

καθώς και την ανίσωση:

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \ln x+1<0 \Leftrightarrow \ln x<-1 \Leftrightarrow \ln x<\ln e^{-1} \overset{\substack{\ln x:\ \text{γνησίως}\\ \text{αύξουσα}}}{\Leftrightarrow} x<e^{-1} \Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{e}$$

Η f είναι συνεχής στο $[0,\ +\infty)$,
επομένως (λόγω της προηγούμενης διερεύνησης) έχουμε:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{e},\ +\infty\right)$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[0,\ \frac{1}{e}\right]$
- Παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0=\frac{1}{e}$ το

  $$f\left(\frac{1}{e}\right)\overset{\frac{1}{e}>0}{=}\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln e^{-1}=-\frac{1}{e}$$

γ. Είναι: $x=e^{\frac{\alpha}{x}} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x=\ln e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x=\frac{\alpha}{x}\ln e \Leftrightarrow \ln x=\frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x\ln x=\alpha \Leftrightarrow f(x)=\alpha$

(για $\left(x\in(0,\ +\infty)\right)$). Άρα η $x=e^{\frac{\alpha}{x}}$ είναι ισοδύναμη με την $f(x)=\alpha,\ x\in(0,\ +\infty)$.

Έστω $A=A_1\cup A_2$ όπου $A_1=\left(0,\ \frac{1}{e}\right)$ και $A_2=\left[\frac{1}{e},\ +\infty\right)$, οπότε από (β) ερώτημα είναι $f(A_1)=\left(-\frac{1}{e},\ 0\right)$ και $f(A_2)=\left[-\frac{1}{e},\ +\infty\right)$. Συνεπώς:

- Αν $\alpha<-\frac{1}{e}$, τότε $\alpha\notin f(A_1)$ και $\alpha\notin f(A_2)$, άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha$ δεν έχει ρίζες στο $(0,\ +\infty)$
- Αν $\alpha=-\frac{1}{e}$, τότε $\alpha\notin f(A_1)$ και $\alpha\in f(A_2)$, που επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_2 η εξίσωση $f(x)=\alpha$ θα έχει μοναδική ρίζα (το $x_0=\frac{1}{e}$).
- Αν $\alpha\in\left(-\frac{1}{e},\ 0\right)$, τότε $\alpha\in f(A_1)$ και $\alpha\in f(A_2)$, άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει δύο ρίζες μία στο A_1 και μία στο A_2 αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1 και γνησίως αύξουσα στο A_2.
- Αν $\alpha=0$, τότε $\alpha\notin f(A_1)$ και $\alpha\in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα το $x_0=1$ αφού $f(1)=1\ \ln 1=0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_2.
- Αν $\alpha>0$, τότε $\alpha\notin f(A_1)$ και $\alpha\in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική λύση αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_2.

δ. Για $x>0$ είναι $f'(x)=\ln x+1$, άρα $f''(x)=(\ln x+1)'=\dfrac{1}{x}>0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\ +\infty)$

- Η f είναι συνεχής στο $[x,\ x+1]$, $x>0$ ως γινόμενο συνεχών
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x,\ x+1)$ ως παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$

Άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. (διαφ. Λογισμού) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x,\ x+1)$ $(x>0)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=f(x+1)-f(x)$ (1)

Όμως $\xi<x+1$ και f' γνησίως αύξουσα στο $(0,\ +\infty)$ άρα

$f'(\xi)<f'(x+1)\Leftrightarrow f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$, άρα ισχύει η ανίσωση.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω $\alpha=\int_0^2 f(t)dt$, $\alpha\in\mathbb{R}$, τότε έχουμε: $f(x)=\alpha\left(10x^3+3x\right)-45$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,\ 2]\subseteq\mathbb{R}$, άρα

$$\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2\left[\alpha\left(10x^3+3x\right)-45\right]dx\Leftrightarrow\alpha=\alpha\int_0^2\left(10x^3+3x\right)dx-45\int_0^2 dx$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha=\alpha\left[\frac{5x^4}{2}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^2-45[x]_0^2\Leftrightarrow\alpha=46\alpha-90\Leftrightarrow\alpha=2.$$

Άρα η συνάρτηση f έχει τύπο: $f(x)=20x^3+6x-45$, $x\in\mathbb{R}$.

β. Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
(αφού η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$).

Για $x_0\in\mathbb{R}$ έχουμε: $g''(x_0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g'(x_0+h)-g'(x_0)}{h}\overset{\substack{\text{θέτουμε}\\ u=-h}}{\underset{h\to0\Leftrightarrow u\to0}{=}}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{g'(x_0-u)-g'(x_0)}{-u}=$

$=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{-\left[g'(x_0)-g'(x_0-u)\right]}{-u}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{g'(x_0)-g'(x_0-u)}{u}$, $x_0\in\mathbb{R}$.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g''(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$

γ. i) Είναι: $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}=f(x)+45$

Έχουμε:

$$\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.L'H}{=}}\begin{pmatrix}\text{παραγώγιση}\\ \text{ως προς } h\end{pmatrix}\lim_{h\to0}\frac{g'(x+h)(x+h)'-0+g'(x-h)(x-h)'}{\left(h^2\right)'}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{g'(x+h)-g'(x)+g'(x)-g'(x-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\left[\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h}+\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\right]\overset{\text{από (β)}}{=}\frac{1}{2}\left[g''(x)+g''(x)\right]=g''(x)$$

Άρα από υπόθεση: $g''(x)=f(x)+45\Leftrightarrow g''(x)\overset{(\alpha)}{=}20x^3+6x=\left[5x^4+3x^2\right]'$,

Επομένως, επειδή η g' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα έχουμε:

$g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$.

Είναι: $g'(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1$, άρα $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 \Leftrightarrow g'(x) = \left(x^5 + x^3 + x\right)'$

$\overset{g \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} g(x) = x^5 + x^3 + x + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$. Όμως $g(0) = 1 \Leftrightarrow c_2 = 1$,

επομένως : $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

ii) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με: $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $5x^4 \geq 0,\ 3x^2 \geq 0$, επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Οπότε θα είναι και ‘’1-1’’ σε αυτό.