ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΖΑΜΠΕΛΗΣ
ΝΙΚΟΣ ΖΑΧΟΠΟΥΛΟΣ
ΛΕΥΤΕΡΗΣ ΜΑΡΚΕΣΙΝΗΣ

- Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D_f$, όταν $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$
- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής σε αυτό.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θέμα 1ο

Έστω $f(x)=\dfrac{x-\mu}{x+3}$, $\mu \in \mathbb{R}$ και το σημείο $M\left(2,\ -\dfrac{2}{5}\right)$ που ανήκει στην καμπύλη της f

Α. Να βρείτε:

i. Την τιμή του πραγματικού αριθμού μ

ii. Τις εξισώσεις των εφαπτομένων στην καμπύλη της f που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε): $7x-9y=0$

Β. Για τη συνάρτηση $\varphi(x)=2f'(x)-3$, $x \neq -3$:

i. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varphi(-1+h)-\varphi(-1)}{h}$

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 στην καμπύλη της $\varphi(x)$ στο σημείο Ν με τετμημένη $x_0=-1$

iii. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left[3+\varphi(x)\right](x+3)^2(x-1)}{14(x^2-3x+2)}$

Λύση

Α. i. Το πεδίο ορισμού της f είναι $A=\mathbb{R}-\{-3\}$, αφού, για να ορίζεται αυτή, πρέπει $x\neq -3$

Το σημείο $M\left(2,\ -\dfrac{2}{5}\right)$ ανήκει στη καμπύλη της f, άρα ισχύει $f(2)=-\dfrac{2}{5}$, δηλαδή $\dfrac{2-\mu}{5}=-\dfrac{2}{5}\Leftrightarrow \mu=4$

Οπότε $f(x)=\dfrac{x-4}{x+3}$, $x\neq -3$

ii. Έστω $\Sigma(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της καμπύλης της f με την εφαπτομένη ευθεία δ.

Αφού $\delta // \varepsilon$ θα ισχύει $\lambda_\varepsilon=\lambda_\delta$, (1). Όμως $7x-9y=0\Leftrightarrow y=\dfrac{7}{9}x$, άρα $\lambda_\varepsilon=\dfrac{7}{9}$ και από (1) είναι: $\lambda_\delta=\dfrac{7}{9}$

Ισχύει $f'(x_0)=\lambda_\delta$, οπότε $f'(x_0)=\dfrac{7}{9}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της Α με παράγωγο:

$$f'(x)=\frac{(x-4)'(x+3)-(x-4)(x+3)'}{(x+3)^2}=\frac{x+3-x+4}{(x+3)^2}=\frac{7}{(x+3)^2},\ x\in\mathbb{R}-\{-3\},\ \text{οπότε από } f'(x_0)=\frac{7}{9}$$

έχουμε: $\dfrac{7}{(x_0+3)^2}=\dfrac{7}{9}\Leftrightarrow (x_0+3)^2=9$, άρα $x_0+3=3\Leftrightarrow x_0=0$ ή $x_0+3=-3\Leftrightarrow x_0=-6$, που είναι δεκτές.

<u>Εύρεση των εφαπτομένων ευθειών:</u>

- $f(0)=-\dfrac{4}{3}$ και η εφαπτομένη δ_1 στο $\Sigma_1\left(0,-\dfrac{4}{3}\right)$ έχει εξίσωση $y=\dfrac{7}{9}x+\beta$, άρα $-\dfrac{4}{3}=\dfrac{7}{9}\cdot 0+\beta\Leftrightarrow \beta=-\dfrac{4}{3}$,

  επομένως (δ_1): $y=\dfrac{7}{9}x-\dfrac{4}{3}$

- $f(-6)=\dfrac{10}{3}$ και η εφαπτομένη δ_2 στο $\Sigma_2\left(-6,\dfrac{10}{3}\right)$ έχει εξίσωση $y=\dfrac{7}{9}x+\gamma$, άρα $\dfrac{10}{3}=\dfrac{7}{9}\cdot(-6)+\gamma\Leftrightarrow$

  $\gamma=8$, επομένως (δ_2): $y=\dfrac{7}{9}x+8$

Β i. Ισχύει: $\varphi(x)=2f'(x)-3$ και η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $x\neq-3$ με παράγωγο:

$$f''(x)=\left[\frac{7}{(x+3)^2}\right]'=7\frac{-2(x+3)}{(x+3)^4}=-\frac{14}{(x+3)^3}.$$ Το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\varphi(-1+h)-\varphi(-1)}{h}=$

$$\lim_{h\to0}\frac{2f'(-1+h)-3-2f'(-1)+3}{h}=2\cdot\lim_{h\to0}\frac{f'(-1+h)-f'(-1)}{h}=2f''(-1)=-\frac{7}{2}$$

ii. $\varphi(-1)=2f'(-1)-3=\dfrac{1}{2}$ και η εξίσωση εφαπτομένης στο $N\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$ είναι $y=-\dfrac{7}{2}x+\kappa$ (από Bi). Όμως $N\in\varepsilon_1$ οπότε: $1=7+2\kappa\Leftrightarrow\kappa=-3$. Έτσι, η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 είναι $7x+2y+6=0$

iii. Για $x\neq1$:

$$\lim_{x\to1}\frac{\left[3+\varphi(x)\right](x+3)^2(x-1)}{14(x^2-3x+2)}=\lim_{x\to1}\frac{2f'(x)(x+3)^2(x-1)}{14(x-1)(x-2)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to1}\frac{1}{x-2}=-1$$

Θέμα 2ο

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+22}-5}{\mu(x^6-27)}$ με $\mu\neq0$ και $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}f(x)=\dfrac{1}{270}$

Α. Να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού Α της f και **ii.** τον πραγματικό αριθμό μ.

Β. Έστω συνάρτηση

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln^2 x-3\ln x+2}{2-\ln x}, & x>0,\ x\neq e^2\\ 27f(0)+\sqrt{22}-6, & x=e^2\end{cases}$$

α. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση h είναι συνεχής στο σημείο με τετμημένη $x_0=e^2$

β. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της h ως προς x, όταν $x=1$

γ. Ποια η εξίσωση της εφαπτομένης ε στη καμπύλη της h στο σημείο $\Sigma(1,h(1))$;

Λύση

Α. i. Έχουμε:

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+22}-5}{\mu(x^6-27)}$. Η f ορίζεται όταν $x^6-27\neq 0$, δηλαδή όταν $x\neq-\sqrt{3},\ x\neq\sqrt{3}$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $A=\mathbb{R}-\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$

ii. Για $x\neq\sqrt{3}$:

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}f(x)=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{\sqrt{x^2+22}-5}{\mu(x^6-27)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{\left(\sqrt{x^2+22}-5\right)\left(\sqrt{x^2+22}+5\right)}{\mu\left[(x^2)^3-3^3\right]\left(\sqrt{x^2+22}+5\right)}=$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{\left[\left(\sqrt{x^2+22}\right)^2-25\right]}{\mu(x^2-3)(x^4+3x^2+9)\left(\sqrt{x^2+22}+5\right)}=$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{\mu(x^2-3)(x^4+3x^2+9)\left(\sqrt{x^2+22}+5\right)}=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{1}{\mu(x^4+3x^2+9)\left(\sqrt{x^2+22}+5\right)}=\frac{1}{270\mu}$$

Ισχύει $\lim_{x\to\sqrt{3}}f(x)=\dfrac{1}{270}$, οπότε: $\dfrac{1}{270\mu}=\dfrac{1}{270}\Leftrightarrow\mu=1$

Β. α. Για $x\neq e^2$:

$$\lim_{x\to e^2}h(x)=\lim_{x\to e^2}\frac{\ln^2 x-3\ln x+2}{2-\ln x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to e^2}\frac{(\ln x-1)(\ln x-2)}{-(\ln x-2)}=-\lim_{x\to e^2}(\ln x-1)=-1$$

Για $x\in A$ είναι:

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+22}-5}{x^6-27}$, οπότε $f(0)=\dfrac{5-\sqrt{22}}{27}$, επομένως $h(e^2)=27f(0)+\sqrt{22}-6=27\dfrac{5-\sqrt{22}}{27}+\sqrt{22}-6=-1$

Άρα $\lim_{x\to e^2}h(x)=h(e^2)$, δηλαδή η h είναι συνεχής στο $x_0=e^2$

β. Για $x\neq e^2$ και $x>0$:

$h(x)=\dfrac{\ln^2 x-3\ln x+2}{2-\ln x}=\dfrac{(\ln x-1)(\ln x-2)}{-(\ln x-2)}=-(\ln x-1)=1-\ln x$ και η h είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο:

$h'(x)=(1-\ln x)'=-\dfrac{1}{x}$

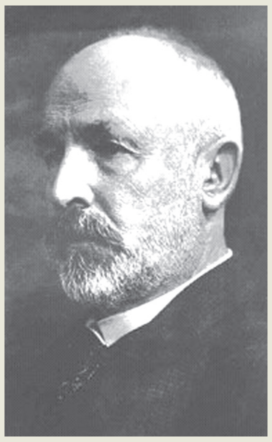
Συνεπώς ο ρυθμός μεταβολής της h ως προς x, όταν $x=1$ είναι $h'(1)=-1$

γ. Είναι $h(x)=1-\ln x,\ x\neq e^2, x>0$, οπότε $h(1)=1-\ln 1=1$ και $h'(1)=-1$

Η ε έχει εξίσωση $y=-x+\kappa$ και $\Sigma\in\varepsilon$, άρα $1=-1+\kappa\Leftrightarrow\kappa=2$, οπότε $\varepsilon: y=-x+2$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΓΚΕΟΡΓΚ ΚΑΝΤΟΡ (1845-1918)



Σπουδαίος Γερμανός μαθηματικός εβραϊκής καταγωγής, ο δημιουργός της μεγαλοφυούς θεωρίας των συνόλων και ιδιαίτερα των απειροσυνόλων. Το 1867 πήρε το διδακτορικό του δίπλωμα στο Βερολίνο και στη συνέχεια δίδαξε στο Πανεπιστήμιο της Χάλε. Τα πρώτα δημοσιεύματα, σχετικά με το έργο της ζωής του, τη θεωρία δηλαδή των συνόλων, έγιναν το 1874. Ακολούθησαν πολλές ακόμα μελέτες με τις οποίες ανέπτυξε μία θεωρία για «πληθικούς αριθμούς». Όλες αυτές οι πνευματικές κατασκευές του είχαν ένα φιλοσοφικό υπόβαθρο: την παραδοχή της ύπαρξης «ενεστωτικού απείρου». Οι αντιλήψεις του ήταν σύμφωνες με τις μεσαιωνικές θεολογικές απόψεις, τις οποίες είχε ένθερμα ενστερνιστεί. Τα βασικά έργα του, στα οποία ανέπτυξε τη θεωρία του είναι τα «Θεμέλια μιας Γενικής Θεωρίας Πολλαπλοτήτων» (1883) και η «Συμβολή στη Θεμελίωση της Υπερπεπερασμένης Θεωρίας των Συνόλων» (1895-97). Αν και υπήρξαν αρκετοί που αντιτάχθηκαν στις ιδέες του και παρά τις αμφισβητήσεις και διαφωνίες γύρω από το έργο του, που παραμένουν ζωντανές, το σύγχρονο ρεύμα των μαθηματικών χαρακτηρίζεται ως «καντοριανό». Πριν από μερικές δεκαετίες, ψήγματα της καντοριανής θεωρίας περιλήφθηκαν στη σχολική ύλη πολλών κρατών με τον βαρύγδουπο τίτλο «Νέα Μαθηματικά».