ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΖΑΜΠΕΛΗΣ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ

Έστω α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί και $z \in \mathbb{C}$. Αν Μ, Α, Β οι εικόνες των z, α, β αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο, τότε:

- Η σχέση $|z-\alpha| = |z-\beta| \Leftrightarrow (MA) = (MB)$ παριστάνει την μεσοκάθετο ευθεία του τμήματος με άκρα $A(\alpha,0), B(\beta,0)$
- Η σχέση $|z-\alpha| = \theta > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $A(\alpha,0)$ και ακτίνα θ

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Θέμα 1^{o}

Α. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 για τους οποίους ισχύουν:

$|z_1 - 2| = 3$ και $z_2 = \dfrac{3 - iz_1}{z_1 - i}$. Να δείξετε ότι η εικόνα του z_2 ανήκει σε κύκλο C του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και να υπολογίσετε την ακτίνα.

Β. Αν η εικόνα του μιγαδικού w_1 κινείται πάνω σε ευθεία ε με εξίσωση $y = 2x - 3$, να δείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού w_2 για τον οποίο ισχύει $2w_1 + iw_2 = 3 + 2i$, κινείται πάνω σε ευθεία η με εξίσωση $x + 2y - 2 = 0$

Γ. Αν τα τυχαία σημεία $M \in C_1$ και $N \in \eta$ είναι οι εικόνες των μιγαδικών z, w αντίστοιχα, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$, όπου C_1 ο κύκλος με κέντρο Κ (-1,-4) και ακτίνα ρ=$3\sqrt{2}$

Λύση

Α. Ισχύει:

$z_2 = \dfrac{3 - iz_1}{z_1 - i}$, άρα $(z_1 - i)z_2 = 3 - iz_1 \Leftrightarrow z_1 z_2 - iz_2 = 3 - iz_1 \Leftrightarrow (z_2 + i)z_1 = 3 + iz_2 \Leftrightarrow z_1 = \dfrac{3 + iz_2}{z_2 + i}$, (1)

Επομένως από $|z_1 - 2| = 3$ και την (1) παίρνουμε $\left|\dfrac{3 + iz_2}{z_2 + i} - 2\right| = 3$, άρα $\left|\dfrac{3 + iz_2 - 2z_2 - 2i}{z_2 + i}\right| = 3 \Leftrightarrow$

$|z_2(-2 + i) + 3 - 2i| = 3|z_2 + i|$ όπου αν θέσουμε $z_2 = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$, έχουμε: $|(-2 + i)(x + yi) + 3 - 2i| = 3|x + yi + i|$

$\Leftrightarrow |-2x - 2yi + ix - y + 3 - 2i| = 3|x + (y + 1)i| \Leftrightarrow |(3 - 2x - y) + (x - 2y - 2)i| = 3|x + (y + 1)i| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(3 - 2x - y)^2 + (x - 2y - 2)^2} = 3\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{(3 - 2x - y)^2 + (x - 2y - 2)^2}\right)^2 = 9\left(\sqrt{x^2 + (y + 1)^2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$(3 - 2x - y)^2 + (x - 2y - 2)^2 = 9x^2 + 9(y + 1)^2 \Leftrightarrow 9 + 4x^2 + y^2 - 12x - 6y + 4xy + x^2 + 4y^2 + 4 - 4xy - 4x + 8y =$

$9x^2 + 9y^2 + 18y + 9 \Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 - 16x + 2y + 13 = 9x^2 + 9y^2 + 18y + 9 \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + 16x + 16y - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + y^2 + 4x + 4y - 1 = 0$, συνεπώς η εικόνα του z_2 ανήκει σε κύκλο C με κέντρο $\Lambda(-2, -2)$ και ακτίνα $\rho = 3$

Β. Αν $w_1 = \alpha + \beta i,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $w_2 = x + yi$, τότε από την σχέση $2w_1 + iw_2 = 3 + 2i$, έχουμε:

$2(\alpha + \beta i) + i(x + yi) = 3 + 2i \Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta i + xi - y = 3 + 2i \Leftrightarrow (2\alpha - y) + i(2\beta + x) = 3 + 2i$. Επομένως προκύπτει

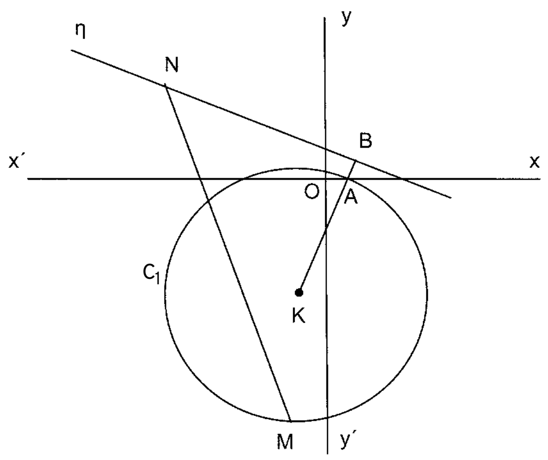
το σύστημα των εξισώσεων: $(\Sigma): \begin{cases} 2\alpha - y = 3 \\ 2\beta + x = 2 \end{cases}$ με αγνώστους α, β για τους οποίους όμως ισχύει $\beta = 2\alpha - 3$ (2),

αφού η εικόνα του μιγαδικού $w_1 = \alpha + \beta i$ κινείται πάνω σε ευθεία ε με εξίσωση $y = 2x - 3$. Λύνουμε το

$(\Sigma): \begin{cases} 2\alpha - y = 3 \\ 2\beta + x = 2 \end{cases}$ και έχουμε: $\alpha = \dfrac{y + 3}{2}$, $\beta = \dfrac{2 - x}{2}$, οπότε από (2): $\dfrac{2 - x}{2} = 2\dfrac{y + 3}{2} - 3 \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$

Άρα η εικόνα του μιγαδικού w_2 κινείται πάνω σε ευθεία η με εξίσωση $x + 2y - 2 = 0$

Γ.



Για τα τυχαία σημεία $M \in C_1$ και $N \in \eta$ από Γεωμετρία (σχήμα) ισχύει ότι:
$(AB) \le (MN)$ με $A \in C_1$ και $B \in \eta$
Τα σημεία Α, Β είναι αυτά στα οποία η κάθετος ευθεία που φέρουμε από το κέντρο Κ προς την ευθεία η τέμνει κατά σειρά τον C_1 και την η.
Το $|z - w|$ παριστάνει την απόσταση των εικόνων Μ, Ν των μιγαδικών z, w
Είναι επομένως $(MN) = |z - w|$ και από την $(AB) \le (MN)$ προκύπτει: $\min|z - w| = (AB)$. Ακόμη:

$(AB) = d(K, \eta) - \rho = \dfrac{|-1 - 8 - 2|}{\sqrt{1 + 4}} - 3\sqrt{2} =$

$\dfrac{11}{\sqrt{5}} - 3\sqrt{2} = \dfrac{11 - 3\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \dfrac{(11 - 3\sqrt{10})\sqrt{5}}{5}$

Συνεπώς $\min|z - w| = \dfrac{(11 - 3\sqrt{10})\sqrt{5}}{5}$

Θέμα 2^{o}

Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z = 1 - \kappa + (2\kappa + 1)i,\ \kappa \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z

β. Έστω w ο μιγαδικός για τον οποίο:

$w - 3 = (1 + i)^3$. Να βρείτε το μιγαδικό z που έχει την πλησιέστερη εικόνα σ' αυτήν του w

α. Έστω $z = x + yi,\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

Τότε από $z = 1 - \kappa + (2\kappa + 1)i$, έχουμε $x + yi = 1 - \kappa + (2\kappa + 1)i,\ \kappa \in \mathbb{R}$, άρα:

$$\begin{cases} x = 1-\kappa \\ \text{και} \\ y = 2\kappa+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2-2\kappa \\ \text{και} \\ y = 2\kappa+1, \end{cases}$$ όπου προσθέτοντας κατά μέλη, προκύπτει: $2x+y=3$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z είναι ευθεία ε με εξίσωση $y=-2x+3$

β. Είναι:

$w-3=(1+i)^3$, άρα $w-3=(1+i)^2(1+i) \Leftrightarrow w-3=2i(1+i) \Leftrightarrow w=1+2i$,

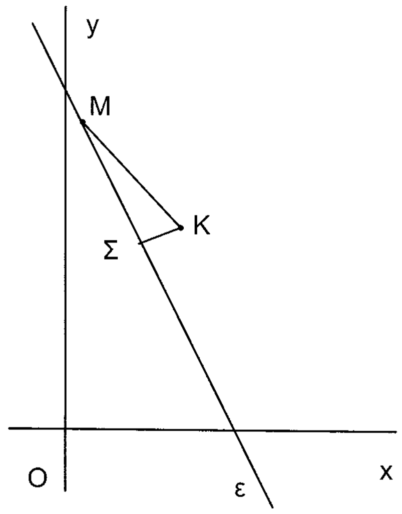
οπότε αν Κ η εικόνα του w, τότε $K(1,2)$

Το $|z-w|$, είναι η απόσταση της εικόνας του μιγαδικού z από την εικόνα του μιγαδικού w

Για κάθε σημείο Μ της ευθείας ε: $y=-2x+3$ ισχύει από Γεωμετρία (σχήμα) ότι: $(MK) \geq (\Sigma K)$, όπου Σ το σημείο τομής της ευθείας ε με την κάθετη ευθεία που φέρουμε από το Κ προς αυτή. Συνεπώς:

ο ζητούμενος μιγαδικός z έχει εικόνα Σ οι συντεταγμένες της οποίας προσδιορίζονται από την

λύση του συστήματος $\begin{cases} y=-2x+3 \\ y-2=\frac{1}{2}(x-1) \end{cases}$, αφού



$y-2=\frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow 2y-3=x$ είναι η εξίσωση της ευθείας ΣΚ

Λύνουμε το σύστημα και έχουμε:

$$\begin{cases} y=3-2x \\ 2y-3=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=9-4y \\ 2y-3=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{9}{5} \\ x=\frac{3}{5}, \end{cases}$$ Άρα $\Sigma\left(\frac{3}{5},\frac{9}{5}\right)$ και $z=\frac{3}{5}+\frac{9}{5}i$

Θέμα 3°

Έστω $z \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε $(3z+2i)^{2\kappa+1}=(\bar{z}+2i)^{2\kappa+1}$, $\kappa \in \mathbb{N}$

α. Να αποδείξετε ότι:

$|z+2i|^2+|z|^2=4$

β. Να βρείτε την απόσταση της εικόνας του μιγαδικού w από την εικόνα του 2i όταν για τον w ισχύει: $2w-3\bar{z}=i$

Λύση

α. Αφού $(3z+2i)^{2\kappa+1}=(\bar{z}+2i)^{2\kappa+1}$, θα ισχύει και $\left|(3z+2i)^{2\kappa+1}\right|=\left|(\bar{z}+2i)^{2\kappa+1}\right|$, άρα $|3z+2i|^{2\kappa+1}=|\bar{z}+2i|^{2\kappa+1}$

Οπότε: $|3z+2i|^2=|\bar{z}+2i|^2 \Leftrightarrow (3z+2i)(3\bar{z}-2i)=(\bar{z}+2i)(z-2i) \Leftrightarrow 9z\bar{z}-6iz+6i\bar{z}+4=z\bar{z}-2i\bar{z}+2iz+4 \Leftrightarrow$

$8z\bar{z}-8iz+8i\bar{z}=0 \Leftrightarrow z\bar{z}=iz-i\bar{z}$, (1). Είναι $|z+2i|^2=(z+2i)(\bar{z}-2i)=z\bar{z}-2iz+2i\bar{z}+4=$

$z\bar{z}-2(iz-i\bar{z})+4\overset{(1)}{=}z\bar{z}-2z\bar{z}+4=|z|^2-2|z|^2+4=-|z|^2+4$, επομένως $|z+2i|^2+|z|^2=4$

β. Ισχύει ότι $2w-3\bar{z}=i$, οπότε $2w-4i=3\bar{z}-3i \Leftrightarrow 2(w-2i)=3(\bar{z}-i)$, απ'όπου έχουμε $2|w-2i|=3|\bar{z}-i|$,

ισοδύναμα $2|w-2i|=3\left|\overline{\bar{z}-i}\right| \Leftrightarrow 2|w-2i|=3|z+i|$, (2). Όμως $|z+i|^2=(z+i)(\bar{z}-i)=z\bar{z}-iz+i\bar{z}+1\overset{(1)}{=}1$, έτσι:

$|z+i|=1$, επομένως η (2) γίνεται $2|w-2i|=3 \Leftrightarrow |w-2i|=\frac{3}{2}$, δηλαδή η απόσταση της εικόνας του w από την εικόνα του 2i είναι ίση με $\frac{3}{2}$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

Λέοναρντ Όιλερ (1707- 1783)

Γεννήθηκε στη Βασιλεία της Ελβετίας στις 15 Απριλίου 1707 και ήταν γιος ιερέα. Σπούδασε γεωμετρία στο Πανεπιστήμιο της Βασιλείας. Σε ηλικία 20 ετών πήγε στην Αγία Πετρούπολη της Ρωσίας, όπου εργάστηκε για την οργάνωση της Ακαδημίας Επιστημών, έπειτα από πρόσκληση της αυτοκράτειρας Αικατερίνης Α΄. Διορίστηκε καθηγητής της Φυσικής Φιλοσοφίας στο Πανεπιστήμιο της Αγίας Πετρούπολης. Το 1744 τον προσκάλεσε ο Φρειδερίκος Β΄ της Πρωσίας στο Βερολίνο, για να αναλάβει διευθυντής του τμήματος των μαθηματικών της εκεί Ακαδημίας. Είναι χαρακτηριστικός ο λόγος που είπε στον Γάλλο άθεο φιλόσοφο Ντενί Ντιντερό, όταν η τσαρίνα της Ρωσίας Μεγάλη Αικατερίνη είχε καλέσει τον Όιλερ στην Αυλή της, σε μια προσπάθεια να σταματήσει την αθυροστομία του Ντιντερό. Ο Ελβετός είπε στο Γάλλο: «Κύριε, (α + β) / ν = x, άρα ο Θεός υπάρχει. Απαντήστε!». Έτσι, ο Ντιντερό αποχώρησε ηττημένος.

Τα τελευταία 17 χρόνια της ζωής του ο διάσημος μαθηματικός ήταν σχεδόν τυφλός. Αυτό, όμως, δεν τον εμπόδισε να εργάζεται. Η εκπληκτική μνήμη του σε συνδυασμό με τη διανοητική του διαύγεια τού ήταν αρκετές για να πραγματοποιεί προφορικά τους υπολογισμούς του, τους οποίους υπαγόρευε στη γραμματέα του. Πέθανε στις 18 Σεπτεμβρίου 1783.