ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΖΑΜΠΕΛΗΣ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ

- Η γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} μιας συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα το πολύ σημείο.
- Αν μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Α, τότε οι γραφικές παραστάσεις της f και της f^{-1}έχουν κοινά σημεία πιθανώς και εκτός της y=x

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{\lambda x^3} + x - \lambda^2$, $\lambda > 0$

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β. Αν η συνάρτηση $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(1) = 0$ είναι $1-1$ στο $\mathbb{R}$, τότε:

i) Δείξτε ότι η συνάρτηση g για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^{-\lambda h^3(x)}\left(g(x) - h(x)\right) = 1 - \lambda^2 e^{-\lambda h^3(x)}$, είναι $1-1$

ii) Υπολογίστε την τιμή $g^{-1}(1-\lambda^2)$

γ. Έστω $z \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε: $g(|z+3-4i|) + 1 - g^{-1}(1-\lambda^2) = g(|3z+5|)$, όπου g η συνάρτηση του β. ερωτήματος

i) Βρείτε τη γραμμή στην οποία ανήκει η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο.

ii) Δείξτε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ όπου Ο(0,0), Α(2z), Β($-3-i$) είναι ισοσκελές.

iii) Δείξτε ότι $|z| \le \sqrt{10}$

Λύση

α. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε $x_1^3 < x_2^3$ και $\lambda x_1^3 < \lambda x_2^3$ (αφού λ>0) , άρα $e^{\lambda x_1^3} < e^{\lambda x_2^3}$

Επομένως $e^{\lambda x_1^3} + x_1 < e^{\lambda x_2^3} + x_2 \Leftrightarrow e^{\lambda x_1^3} + x_1 - \lambda^2 < e^{\lambda x_2^3} + x_2 - \lambda^2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β. i) Είναι $e^{-\lambda h^3(x)}\left(g(x) - h(x)\right) = 1 - \lambda^2 e^{-\lambda h^3(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $g(x) - h(x) = e^{\lambda h^3(x)} - \lambda^2 \Leftrightarrow$

$g(x) = e^{\lambda h^3(x)} + h(x) - \lambda^2 \Leftrightarrow g(x) = f(h(x))$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2)$, έχουμε

$f(h(x_1)) = f(h(x_2)) \Leftrightarrow h(x_1) = h(x_2)$ (αφού $f: 1-1$ ως γνησίως αύξουσα), οπότε $x_1 = x_2$ επειδή $h: 1-1$

Συνεπώς η g είναι $1-1$ στο $\mathbb{R}$ (άρα αντιστρέφεται).

ii) Για $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) = f(h(x))$, που όταν $x = 1$ γίνεται $g(1) = f(h(1))$, άρα $g(1) = f(0) = 1 - \lambda^2$

Επομένως $g(1) = 1 - \lambda^2$, οπότε $g^{-1}(1-\lambda^2) = 1$

γ. i) Είναι $g(|z+3-4i|) + 1 - g^{-1}(1-\lambda^2) = g(|3z+5|)$, ισοδύναμα $g(|z+3-4i|) = g(|3z+5|)$ (από βii)), οπότε:

$|z+3-4i| = |3z+5|$ αφού η g είναι $1-1$. Έτσι αν $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$, τότε:

$\sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(3x+5)^2 + (3y)^2}$ απ΄όπου: $(x+3)^2 + (y-4)^2 = (3x+5)^2 + 9y^2 \Leftrightarrow$

$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 9x^2 + 30x + 25 + 9y^2 \Leftrightarrow 8x^2 + 8y^2 + 24x + 8y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3x + y = 0$, (1).

Η ισότητα (1) επαληθεύεται από όλους τους μιγαδικούς z που η εικόνα τους (x, y) έχει την ιδιότητα να απέχει από το σημείο $K(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ σταθερή απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{10}}{2}$ και μόνο από αυτούς.

Συνεπώς, η ζητούμενη γραμμή είναι κύκλος C με κέντρο $K(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{10}}{2}$

ii) Το $|-3-i|$ είναι η απόσταση της εικόνας Β($-3-i$) από το σημείο Ο(0, 0) , δηλαδή το μήκος (ΟΒ), άρα (ΟΒ)=$|-3-i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$. Ομοίως το $|2z+3+i| = |2z-(-3-i)|$ είναι η απόσταση της εικόνας Α(2z), από την εικόνα Β($-3-i$), δηλαδή το μήκος (ΑΒ). Όμως από γi) ισχύει $\left|z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \frac{\sqrt{10}}{2}$, επομένως:

$|2z+3+i| = \sqrt{10}$. Άρα (ΟΒ) = (ΑΒ), δηλαδή το τρίγωνο ΟΑΒ με Ο(0,0), Α(2z), Β($-3-i$) είναι ισοσκελές.

iii) Είναι $|z| = \left|\left(z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right) - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right| \le \left|z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right| + \left|\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right|$, άρα (από γi)) $|z| \le \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow |z| \le \sqrt{10}$

Θέμα 2ο

Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ισχύει $f^3(x) + 5f(x) = x - 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της f^{-1}

γ. Έστω $z \in \mathbb{C}$ για τον οποίο $f(|z-2i|) = f(|3-i\bar{z}|) + f(4)$. Να βρείτε τη γραμμή στην οποία ανήκει η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο.

Λύση

α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^3 + 5x$, $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού: για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

με $x_1<x_2$ έχουμε $x_1^3+5x_1<x_2^3+5x_2 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$. Από $f^3(x)+5f(x)=x-4$, έχουμε $g(f(x))=x-4$

Συνεπώς για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1-4<x_2-4$, άρα $g(f(x_1))<g(f(x_2)) \overset{g:\text{γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε αντιστρέφεται. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θέτουμε $f(x)=y$, $y\in\mathbb{R}$ και από την σχέση της υπόθεσης έχουμε: $y^3+5y+4=x$, (1). Είναι $f(x)=y$, οπότε $f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, (2)
Η (1) λόγω της (2) γίνεται $f^{-1}(y)=y^3+5y+4$, $y\in\mathbb{R}$. Συνεπώς ο τύπος της αντίστροφης της f είναι:
$f^{-1}(x)=x^3+5x+4$, $x\in\mathbb{R}$

γ. Έστω $f(4)=\lambda\in\mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(f(4))=f^{-1}(\lambda)$, άρα:
$f^{-1}(\lambda)=4\overset{\beta.}{\Leftrightarrow}\lambda^3+5\lambda+4=4\Leftrightarrow\lambda(\lambda^2+5)=0\Leftrightarrow\lambda=0$(αφού $\lambda^2+5>0$), επομένως είναι $f(4)=0$
Άλλος τρόπος που υπολογίζουμε το $f(4)$: Στην $f^3(x)+5f(x)=x-4$, θέτουμε όπου $x=4$ και έχουμε
$f^3(4)+5f(4)=4-4\Leftrightarrow f(4)(f^2(4)+5)=0\Leftrightarrow f(4)=0$. Έτσι η σχέση $f(|z-2i|)=f(|3-i\bar z|)+f(4)$ γίνεται:
$f(|z-2i|)=f(|3-i\bar z|)\Leftrightarrow|z-2i|=|3-i\bar z|$(αφού $f:1-1$ ως γν.αύξ.). Οπότε $|z-2i|=|3-i\bar z|\Leftrightarrow|z-2i|=|i||3-i\bar z|\Leftrightarrow$
$|z-2i|=|3i+\bar z|\Leftrightarrow|z-2i|=\left|\overline{3i+\bar z}\right|\Leftrightarrow|z-2i|=|z-3i|$, που για $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$, γίνεται:
$\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+(y-3)^2}\Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4=x^2+y^2-6y+9\Leftrightarrow 2y=5\Leftrightarrow y=\frac{5}{2}$
Η τελευταία φανερώνει ότι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε ευθεία με εξίσωση $y=\frac{5}{2}$

Θέμα 3ο

Α. Έστω z,w μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $|z|=2$, $|w|=\frac{\sqrt5}{3}$ και $|z-4iw|=|z+4iw|$

α. Να αποδείξετε ότι $w=\alpha z$, με $\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$

β. Να υπολογίσετε την απόσταση ΑΒ των εικόνων Α(z), Β(3iw)

Β. Έστω η συνάρτηση $f(z)=\frac{2i-3z}{z+i}$ όπου $z\in\mathbb{C}-\{-i\}$ με $|z|=2$

α. Αν $w\in\mathbb{C}-\{-i\}$ και $f(z)=f(w)$, να δείξετε ότι $|w|=2$

β. Να δείξετε ότι $|f(z)|\le 8$

Λύση

Α. α. Έχουμε $|z-4iw|=|z+4iw|$, οπότε $|z-4iw|^2=|z+4iw|^2\Leftrightarrow(z-4iw)(\overline{z-4iw})=(z+4iw)(\overline{z+4iw})\Leftrightarrow$
$(z-4iw)(\bar z+4i\bar w)=(z+4iw)(\bar z-4i\bar w)\Leftrightarrow z\bar z+4iz\bar w-4iw\bar z+16w\bar w=z\bar z-4iz\bar w+4iw\bar z+16w\bar w\Leftrightarrow$
$4iz\bar w-4iw\bar z=-4iz\bar w+4iw\bar z\Leftrightarrow 8iz\bar w-8iw\bar z=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}i(8iz\bar w-8iw\bar z)=0\Leftrightarrow w\bar z-z\bar w=0\Leftrightarrow\frac{w}{z}=\overline{\left(\frac{w}{z}\right)}$, οπότε
$\frac{w}{z}\in\mathbb{R}$, αφού αν $\frac{w}{z}=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha\ne0$, τότε από $\frac{w}{z}=\overline{\left(\frac{w}{z}\right)}$ έχουμε $\alpha+\beta i=\alpha-\beta i\Leftrightarrow\beta=0$, δηλαδή $w=\alpha z$

β. Θα υπολογίσουμε το $|z-3iw|^2$ αφού $AB=|z-3iw|$
Είναι $|z-3iw|^2=(z-3iw)(\bar z+3i\bar w)=z\bar z+3iz\bar w-3iw\bar z+9w\bar w=|z|^2+9|w|^2+3i(z\bar w-w\bar z)$
Όμως από Αα ισχύει $w\bar z-z\bar w=0$, επομένως $|z-3iw|^2=|z|^2+9|w|^2\overset{\text{υποθ.}}{=}4+5=9$, έτσι $|z-3iw|=3=AB$

Β. α. Ισχύει $f(z)=f(w)$, οπότε: $\frac{2i-3z}{z+i}=\frac{2i-3w}{w+i}\Leftrightarrow(2i-3z)(w+i)=(z+i)(2i-3w)\Leftrightarrow 2iw-2-3zw-3iz=$
$2zi-3wz-2-3iw\Leftrightarrow 2iw-3iz=2zi-3iw\Leftrightarrow 5iw=5iz$, άρα $i(5iw)=i(5iz)\Leftrightarrow w=z$, επομένως και
$|w|=|z|\Leftrightarrow|w|=2$, αφού $|z|=2$

β. $|f(z)|=\left|\frac{2i-3z}{z+i}\right|=\frac{|2i-3z|}{|z+i|}$, (1). Είναι $|2i-3z|\le|2i|+|3z|\Leftrightarrow|2i-3z|\le2|i|+3|z|\Leftrightarrow|2i-3z|\le2+2\cdot3\Leftrightarrow$
$|2i-3z|\le8$, (2) και $|z+i|\ge||z|-|i||\Leftrightarrow|z+i|\ge1\Leftrightarrow\frac{1}{|z+i|}\le1$, (3). Η (1), λόγω των (2),(3) δίνει: $|f(z)|\le8$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

Ζιλ Ανρί Πουανκαρέ (1854-1912)

Γάλλος μαθηματικός από το Νανσί, που μεγαλούργησε σαν καθηγητής-ερευνητής του Πανεπιστημίου του Παρισιού. Το έργο του στα Μαθηματικά σήμανε το τέλος της κλασικής εποχής στη συγκεκριμένη επιστήμη και άνοιξε τον δρόμο στην ανάπτυξη των σύγχρονων Μαθηματικών, στα οποία επιτυγχάνονται πια όχι μόνο ποσοτικά αλλά και ποιοτικά αποτελέσματα. Ο Πουανκαρέ ασχολήθηκε κυρίως με τις διαφορικές εξισώσεις και τις υπερβατικές συναρτήσεις. Το 1880 εξέδωσε μια σειρά άρθρων με τίτλο «Περί καμπυλών προσδιοριζομένων υπό διαφορικών εξισώσεων». Αργότερα οδηγήθηκε στη μελέτη νέων κλάσεων υπερβατικών συναρτήσεων, οι οποίες ονομάζονται αυτομορφικές συναρτήσεις. Απέδειξε με αυτές ένα θεώρημα πρόσθεσης, με βάση το οποίο οι αλγεβρικές καμπύλες μπορούσαν να ομοιομορφοποιηθούν. Έτσι, έγινε βασικός θεμελιωτής νόμων της τοπολογίας, αφού οι τύποι της μελετητικής του ομάδας όρισαν τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών των πλευρών, των κορυφών και των εδρών ενός πολυδιάστατου πολυτόπου. Σημαντική υπήρξε η συμβολή του Πουανκαρέ και στη Μαθηματική Φυσική με τις έρευνες για τις ταλαντώσεις τρισδιάστατων συνεχών μέσων.