ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΖΑΜΠΕΛΗΣ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ

- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι 1 – 1 στο $A \subseteq \mathbb{R}$, τέμνει οποιαδήποτε ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, το πολύ μία φορά.
- Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}, μιας 1 – 1 συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R},\ A \subseteq \mathbb{R}$, έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την συνάρτηση f (στο $f(A)$)

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Θέμα 1°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\alpha x} + 4x^3 - \frac{4}{\alpha^3},\ \alpha > 0$

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β. Αν η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(0) = \frac{1}{\alpha}$ είναι 1–1 στο $\mathbb{R}$, τότε:

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση h για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^3 h(x) + 4 = \alpha^3\left(e^{\alpha g(x)} + 4g^3(x)\right)$, είναι 1 – 1

ii) Να υπολογίσετε την τιμή $h^{-1}(e)$

γ. Έστω $z \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε: $h(|z-3+2i|) - h(3) = h^{-1}(e)$, όπου h η συνάρτηση του β. ερωτήματος

Να βρείτε:

i) Τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

ii) Την ελάχιστη και μέγιστη τιμή του $|z+1-i|$

Λύση

α. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ και $\alpha > 0$, έχουμε $\alpha x_1 < \alpha x_2 \Leftrightarrow e^{\alpha x_1} < e^{\alpha x_2}$ και $4x_1^3 < 4x_2^3$

Επομένως $e^{\alpha x_1} + 4x_1^3 < e^{\alpha x_2} + 4x_2^3 \Leftrightarrow e^{\alpha x_1} + 4x_1^3 - \frac{4}{\alpha^3} < e^{\alpha x_2} + 4x_2^3 - \frac{4}{\alpha^3} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β. i) Είναι $\alpha^3 h(x) + 4 = \alpha^3\left(e^{\alpha g(x)} + 4g^3(x)\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $h(x) + \frac{4}{\alpha^3} = e^{\alpha g(x)} + 4g^3(x) \Leftrightarrow$

$h(x) = e^{\alpha g(x)} + 4g^3(x) - \frac{4}{\alpha^3} \Leftrightarrow h(x) = f(g(x))$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $h(x_1) = h(x_2)$, έχουμε

$f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Leftrightarrow g(x_1) = g(x_2)$ (αφού $f: 1-1$ ως γνησίως αύξουσα), οπότε $x_1 = x_2$ επειδή $g: 1-1$

Συνεπώς η h είναι 1–1 στο $\mathbb{R}$ (άρα αντιστρέφεται).

ii) Για $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $h(x) = f(g(x))$, που όταν $x = 0$ γίνεται $h(0) = f(g(0))$, άρα $h(0) = f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = e^{\alpha\frac{1}{\alpha}} + \frac{4}{\alpha^3} - \frac{4}{\alpha^3} = e$

Επομένως $h(0) = e$, οπότε $h^{-1}(e) = 0$

γ. i) Είναι $h(|z-3+2i|) - h(3) = h^{-1}(e)$, οπότε $h(|z-3+2i|) - h(3) = 0$ (από βii)), ισοδύναμα:

$h(|z-3+2i|) = h(3)$, που επειδή η h είναι 1–1 έχουμε $|z-3+2i| = 3$. Η ισότητα $|z-3+2i| = 3$ επαληθεύεται από όλους τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα να απέχουν από το σημείο Κ(3, –2) σταθερή απόσταση ίση με 3 και μόνο από αυτούς. Συνεπώς, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο Κ(3, –2) και ακτίνα $\rho = 3$

ii) Το $|z+1-i|$ είναι η απόσταση της εικόνας M(z) από το σημείο Σ(–1, 1), δηλαδή το μήκος (ΣΜ)

Αν η ευθεία ΣΚ τέμνει τον κύκλο στα Α και Β (με (ΣΑ)<(ΣΒ)), τότε (ΣΑ) ≤ (ΣΜ) ≤ (ΣΒ), που σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή του $|z+1-i|$ είναι το μήκος (ΣΑ) και η ελάχιστη το μήκος (ΣΒ)

Έχουμε $(ΣΚ) = \sqrt{(3+1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$ και (ΣΑ) = (ΣΚ) –ρ = $5-3=2$, (ΣΒ) = (ΣΚ) +ρ = $5+3=8$

Οπότε: $\min|z+1-i| = 2$ και $\max|z+1-i| = 8$

Θέμα 2°

Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ισχύει $f^3(x) + ef(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. Ποιο το είδος της μονοτονίας της f^{-1};

γ. Έστω η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία η $f \circ g$ ορίζεται και είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

i) να εξετάσετε την g ως προς τη μονοτονία και

ii) αν η συνάρτηση $g^{-1} \circ f^{-1}$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $(f \circ g)^{-1}(0) = g^{-1}(0)$

Λύση

α. Έστω ότι για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$. Άρα $ef(x_1) \geq ef(x_2)$ και $f^3(x_1) \geq f^3(x_2)$, οπότε $f^3(x_1) + ef(x_1) \geq f^3(x_2) + ef(x_2) \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$ που είναι άτοπο.
Επομένως $f(x_1) < f(x_2)$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β. • Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε αντιστρέφεται.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θέτουμε $f(x) = y$, $y \in \mathbb{R}$ και από την σχέση της υπόθεσης έχουμε:
$y^3 + ey = x$, (1). Είναι $f(x) = y$, οπότε $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, (2)
Η (1) λόγω της (2) γίνεται $y^3 + ey = f^{-1}(y), y \in \mathbb{R}$. Συνεπώς ο τύπος της αντίστροφης της f είναι:
$f^{-1}(x) = x^3 + ex,\ x \in \mathbb{R}$

• Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε $ex_1 < ex_2$ και $x_1^3 < x_2^3$, οπότε $x_1^3 + ex_1 < x_2^3 + ex_2 \Leftrightarrow$ $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$, δηλαδή η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

γ. i) Η $f \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:
$(f \circ g)(x_1) > (f \circ g)(x_2) \Leftrightarrow f(g(x_1)) > f(g(x_2)) \overset{f:\text{γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} g(x_1) > g(x_2)$
Οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως αντιστρέφεται.

ii) Η $f \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως αντιστρέφεται.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θέτουμε $(f \circ g)(x) = y,\ y \in \mathbb{R}$, οπότε $f(g(x)) = y$ άρα, $f^{-1}(f(g(x))) = f^{-1}(y) \Leftrightarrow$
$g(x) = f^{-1}(y)$, συνεπώς $g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(f^{-1}(y)) \Leftrightarrow (g^{-1} \circ f^{-1})(y) = x$, (3)
Είναι $(f \circ g)(x) = y,\ y \in \mathbb{R}$, οπότε $(f \circ g)^{-1}((f \circ g)(x)) = (f \circ g)^{-1}(y) \Leftrightarrow x = (f \circ g)^{-1}(y)$, (4)
Η (3) λόγω της (4) γίνεται $(f \circ g)^{-1}(y) = (g^{-1} \circ f^{-1})(y)$, $y \in \mathbb{R}$. Συνεπώς ο τύπος της αντίστροφης της $f \circ g$ είναι: $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)),\ x \in \mathbb{R}$
Η σχέση $f^3(x) + ef(x) = x$ για $x = 0$ γίνεται $f^3(0) + ef(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(f^2(0) + e) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$,
αφού $f^2(0) + e > 0$, άρα $f^{-1}(f(0)) = f^{-1}(0) \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 0$
Επομένως: $(f \circ g)^{-1}(0) = (g^{-1} \circ f^{-1})(0) = g^{-1}(f^{-1}(0)) = g^{-1}(0)$

Θέμα 3ο

Α. Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(x^2 + 2x - 8) + f(x + 4) = 6$ για κάθε $x \leq 0$ και η οποία είναι 1–1 στο $(-\infty,\ 0]$
Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$

Β. Δίνονται: συνάρτηση g 1–1 στο $\mathbb{R}$ ($g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$), με $g(1) = -e$ και συνάρτηση h με $h(x) = g(2 - \ln x) + e$, x>0
α. Να αποδείξετε ότι η h είναι 1–1
β. Να αποδείξετε ότι $h^{-1}(x) = e^{2 - g^{-1}(x-e)},\ x \in \mathbb{R}$
γ. Να λύσετε την εξίσωση $h^{-1}(x) = e$

Λύση

Α. Εξετάζουμε πότε ισχύει η ισότητα: $x^2 + 2x - 8 = x + 4$, οπότε ισοδύναμα έχουμε $x^2 + x - 12 = 0$, η οποία δίνει ως λύσεις $x = -4$ ή $x = 3$
Για $x = 3$ η τιμή της παράστασης $x^2 + 2x - 8$ είναι ίση με $7 \notin (-\infty, 0]$, άρα απορρίπτεται.
Για $x = -4$ η σχέση της υπόθεσης $f(x^2 + 2x - 8) + f(x + 4) = 6$, γίνεται $2f(0) = 6$, άρα $f(0) = 3$ με $0 \in (-\infty, 0]$
Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει ως λύση την $x = 0$ που είναι μοναδική αφού η f είναι 1–1 στο $(-\infty,\ 0]$

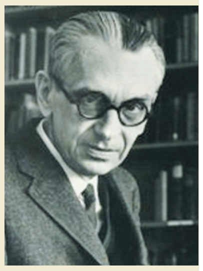
Β. α. Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $h(x_1) = h(x_2)$, έχουμε: $g(2 - \ln x_1) + e = g(2 - \ln x_2) + e \Leftrightarrow$
$g(2 - \ln x_1) = g(2 - \ln x_2) \Leftrightarrow 2 - \ln x_1 = 2 - \ln x_2$(αφού $g: 1-1$), άρα $\ln x_1 = \ln x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, δηλαδή $h: 1-1$

β. Η g είναι 1–1 επομένως, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση g^{-1}. Ομοίως ορίζεται και η αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h. Τότε: θέτουμε $y = h(x),\ x > 0$, οπότε $y = g(2 - \ln x) + e \Leftrightarrow y - e = g(2 - \ln x) \Leftrightarrow$
$2 - \ln x = g^{-1}(y - e) \Leftrightarrow x = e^{2 - g^{-1}(y-e)},\ y \in \mathbb{R}$, άρα $h^{-1}(x) = e^{2 - g^{-1}(x-e)},\ x \in \mathbb{R}$

γ. Είναι $h^{-1}(x) = e$, ισοδύναμα: $x = h(e) \Leftrightarrow x = g(2 - \ln e) + e \Leftrightarrow x = g(1) + e \Leftrightarrow x = 0$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΚΟΥΡΤ ΓΚΕΝΤΕΛ (1906-1978)



Αμερικανός μαθηματικός, αυστριακοεβραϊκής καταγωγής, μέλος του κλαμπ των θετικιστών, χωρίς ο ίδιος να θεωρεί «θετικιστή» τον εαυτό του. Η συμβολή του έχει να κάνει κυρίως με την ανάπτυξη της μαθηματικής λογικής. Δημοσίευση λίγες σχετικά εργασίες αλλά τα θεωρήματά του αποτέλεσαν τους θεμέλιους λίθους της μαθηματικής λογικής. Κορυφαίο θεώρημά του, αυτό της μη πληρότητας, που απέδειξε το 1931 και πήρε το όνομά του. Σύμφωνα με αυτό, οποιαδήποτε μαθηματική θεωρία, που περιέχει τους θετικούς ακεραίους και θεμελιώνεται πάνω σε συμβιβαστά αξιώματα δεν είναι πλήρης. Ο Γκέντελ απέδειξε επίσης ότι αν μια αξιωματική επί των συνόλων είναι συμβιβαστή, τότε παραμένει συμβιβαστή και μετά την προσθήκη του αξιώματος της επιλογής του Ερνστ Τσερμέλο. Με αυτό το θεώρημα τερματίστηκε η μεγάλη διαμάχη που είχε διχάσει τους μαθηματικούς στις πρώτες δεκαετίες του 20 αιώνα σχετικά με τη χρησιμοποίηση του αξιώματος της επιλογής. Στην Αμερική ο Γκέντελ βρέθηκε όπως και πολλοί άλλοι εβραϊκής καταγωγής Ευρωπαίοι επιστήμονες μετά την άνοδο του ναζισμού στην Γερμανία και την Αυστρία.