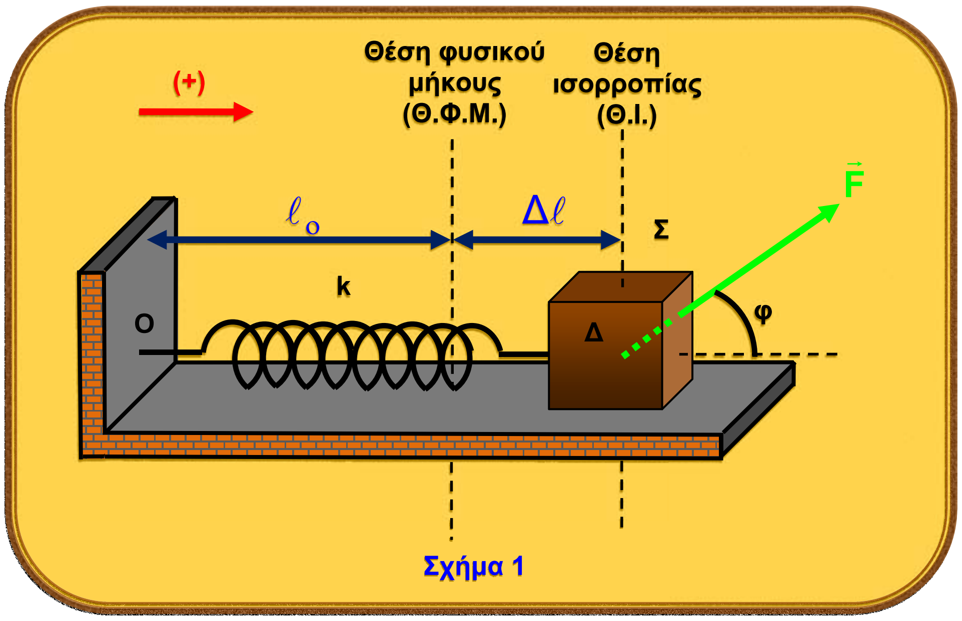
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΔΙΟΝΥΣΗΣ ΣΥΝΟΔΙΝΟΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΤΩΠΟΔΗΣ
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΠΙΣΧΙΝΑΣ
ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΤΣΙΓΚΙΣΤΡΑΣ

Αν η απομάκρυνση x ενός σώματος από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο t δίνεται από τη σχέση:
$x = A\eta\mu(\omega t+\varphi_o)$
τότε το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Ένα σώμα Σ μάζας m ισορροπεί στη θέση Δ ενός λείου οριζόντιου επιπέδου και είναι στερεωμένο στο άκρο ενός οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 80N/m το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε σημείο Ο. Το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι $\ell_o = 1{,}5$m. Στο σώμα Σ ασκείται μια σταθερή δύναμη $\vec{F}$ η οποία σχηματίζει γωνία φ με την οριζόντια διεύθυνση και έχει φορά προς τα επάνω. Η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση Δ είναι $\Delta\ell$. Τη χρονική στιγμή t = 0, εκτοξεύουμε το σώμα Σ με οριζόντια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$ με φορά προς τα δεξιά και μέτρο $\upsilon_o = 1{,}5$m/s. Το σώμα Σ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση κατά τη διάρκεια της οποίας η κάθετη αντίδραση που ασκείται στο σώμα Σ από το επίπεδο έχει μέτρο $N = \frac{mg}{4}$. Τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{8}$s κατά την οποία η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται για πρώτη φορά, καταργείται η δύναμη $\vec{F}$.



Σχήμα 1

α) Να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης και τη μάζα του σώματος Σ.
β) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ.
γ) Να υπολογίστε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.
δ) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση και την ταχύτητα του σώματος Σ τη χρονική στιγμή t_2 κατά την οποία η δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ελατηρίου είναι, για πρώτη φορά μετά την χρονική στιγμή t_1, ίση με το 36% σε σχέση με την αντίστοιχη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου τη χρονική στιγμή t_1.
ε) Να γράψετε την εξίσωση του μήκους ℓ του ελατηρίου σε συνάρτηση με το χρόνο t και να την παραστήσετε γραφικά.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ και η διεύθυνση του ελατηρίου βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.
Θεωρήστε αμελητέες τις διαστάσεις του σώματος Σ και θετική φορά τη φορά προς τα δεξιά.
Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10$m/s^2, ημφ = 0,6 και συνφ = 0,8.

Λύση

α) Το σώμα Σ τη χρονική στιγμή t = 0 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας. Επομένως για τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται για πρώτη φορά ισχύει: $t_1 = \frac{T}{4}$, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης.

Επομένως $T = 4t_1$ ή $T = \frac{\pi}{2}$s.

Η γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ή **$\omega = 4$rad/s**

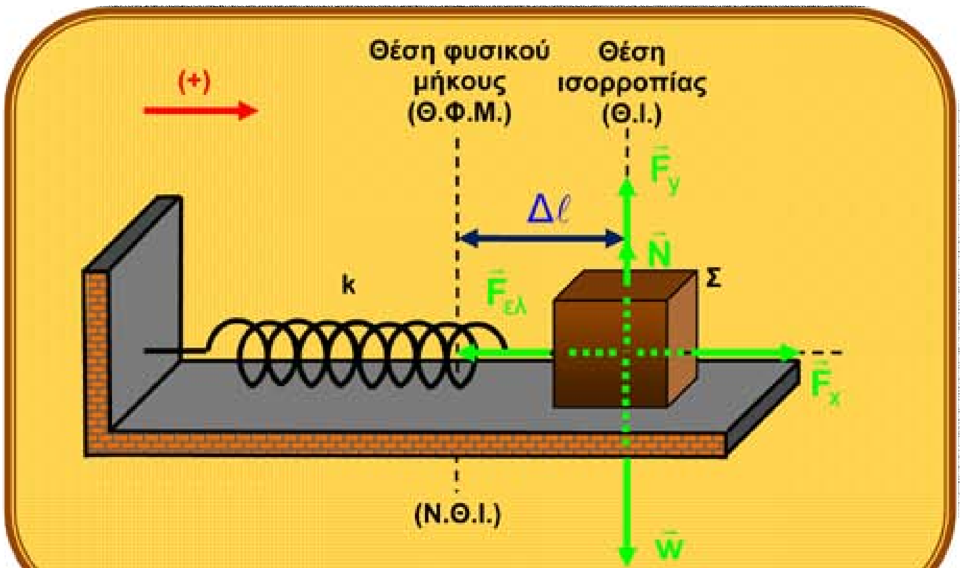
Ισχύει: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ή $m = \frac{kT^2}{4\pi^2}$ ή **m = 5kg**

β) Για την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$ του σώματος Σ τη χρονική στιγμή t = 0 ισχύει: $\upsilon_o = \upsilon_{max}$ ή $\upsilon_o = \omega A$ ή $A = \frac{\upsilon_o}{\omega}$ ή **A = 0,375m**

γ) Στο σώμα Σ όταν βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του ασκούνται οι εξής δυνάμεις:
- το βάρος $\vec{w}$ (w = mg)
- η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ ($F_{\varepsilon\lambda} = k\cdot\Delta\ell$)
- η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$
- η δύναμη $\vec{F}$ (με $F_x = F\sigma\upsilon\nu\varphi$ και $F_y = F\eta\mu\varphi$)

Από τον 1_0 νόμο του Newton για την ισορροπία του σώματος Σ στη θέση Δ προκύπτει:
- $F_x = F_{\varepsilon\lambda}$ ή $F\sigma\upsilon\nu\varphi = k\cdot\Delta\ell$ (1)
- $mg = N + F_y$ ή $mg = \frac{mg}{4} + F\eta\mu\varphi$ ή $F = \frac{3mg}{4\eta\mu\varphi}$ ή **F = 62,5N**

δ) Η θέση όπου η δύναμη $\vec{F}$ καταργείται αποτελεί ακραία (θετική) θέση της ταλάντωσης αφού στη θέση αυτή η ταχύτητα του σώματος Σ είναι μηδενική. Μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ όμως η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αλλάζει. Πλέον το σώμα Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από μια νέα θέση ισορροπίας (Ν.Θ.Ι.) που ταυτίζεται με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (Θ.Φ.Μ.).
Το νέο πλάτος Α΄ της ταλάντωσης είναι:
$A' = A + \Delta\ell$ (2)



Σχήμα 2

Από τη σχέση (1) προκύπτει: $\Delta\ell = \dfrac{F\sigma\upsilon\nu\varphi}{k}$ ή $\Delta\ell = 0{,}625$m

Συνεπώς από τη σχέση (2) προκύπτει: $A' = 1$m

Την πρώτη φορά που ισχύει $U_{ελ(2)} = \dfrac{36}{100}U_{ελ(1)}$ το σώμα Σ βρίσκεται στη θέση $x = +\Delta\ell'$, όπου $\Delta\ell'$ η παραμόρφωση του ελατηρίου.

Η αποθηκευμένη ενέργεια στο ελατήριο είναι: $U_{ελ(2)} = \dfrac{1}{2}k(\Delta\ell')^2$.

Ισχύει: $U_{ελ(2)} = \dfrac{36}{100}U_{ελ(1)}$ ή $\dfrac{1}{2}k(\Delta\ell')^2 = \dfrac{36}{100}\dfrac{1}{2}k(A')^2$ ή $\Delta\ell' = 0{,}6A'$ ή $\Delta\ell' = 0{,}6$m

Άρα για τη χρονική στιγμή t_2 προκύπτει: $x = +\Delta\ell' = +0{,}6$m με $\upsilon<0$.
Η επιτάχυνση του σώματος Σ είναι: $\alpha = -\omega^2 x$ ή $\boldsymbol{\alpha = -9{,}6\,m/s^2}$
Εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας για την ταλάντωση του σώματος Σ, προκύπτει:

$E = K + U$ ή $\dfrac{1}{2}k(A')^2 = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 + \dfrac{1}{2}kx^2$ ή $\upsilon = -\sqrt{k\dfrac{(A')^2 - x^2}{m}}$ ή $\boldsymbol{\upsilon = -3{,}2\,m/s}$

ε) Για την ταλάντωση του σώματος Σ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως την t_1 η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από τη Θ.Ι. είναι: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$
Αφού την $t = 0$ είναι $x = 0$ και $\upsilon = +\upsilon_o > 0$ είναι: $\varphi_o = 0$.
Επομένως η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από τη Θ.Ι. είναι: $x = 0{,}375\eta\mu(4t)$ (S.I.)
Για την ταλάντωση του σώματος Σ μετά την χρονική στιγμή t_1 η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από τη Ν.Θ.Ι. είναι: $x' = A'\eta\mu\left[\omega(t - t_1) + \varphi_o'\right]$.

Αφού την $t = t_1$ είναι $x' = +A'$ είναι: $\varphi_o' = \dfrac{\pi}{2}$.

Επομένως είναι: $x' = 1\eta\mu\left[4\left(t - \dfrac{\pi}{8}\right) + \dfrac{\pi}{2}\right]$ ή $x' = 1\eta\mu(4t)$ (S.I.)

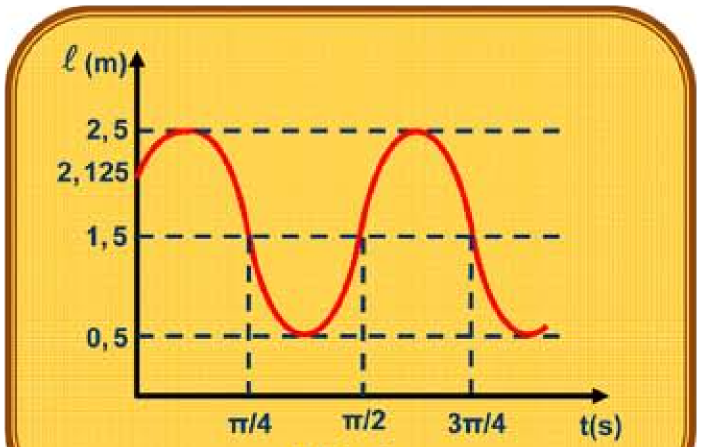
Το μήκος ℓ του ελατηρίου είναι:

$$\ell = \begin{cases} \ell_o + \Delta\ell + x, & 0 \le t \le t_1 \\ \ell_o + x', & t > t_1 \end{cases} \quad \text{ή}$$

$$\ell = \begin{cases} 1{,}5 + 0{,}625 + 0{,}375\eta\mu(4t), & 0 \le t \le \dfrac{\pi}{8} \\ 1{,}5 + 1\eta\mu(4t), & t > \dfrac{\pi}{8} \end{cases} \quad \text{ή}$$

$$\boldsymbol{\ell = \begin{cases} 2{,}125 + 0{,}375\eta\mu(4t), & 0 \le t \le \dfrac{\pi}{8} \\ 1{,}5 + 1\eta\mu(4t), & t > \dfrac{\pi}{8} \end{cases}}$$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Σχήμα 3

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

Γιοχάνες Κέπλερ (1571-1630)

Διάσημος Γερμανός αστρονόμος, που θεωρείται ιδρυτής της σύγχρονης αστρονομίας και οπτικής. Γεννήθηκε στη Βυρτεμβέργη από γονείς φτωχούς και πέρασε δύσκολα παιδικά χρόνια. Επιπλέον, ως διαμαρτυρόμενος, είχε πολλά προβλήματα στις διάφορες φάσεις της σταδιοδρομίας του. Αν και προοριζόταν για κληρικός, δεν τελείωσε τις θεολογικές σπουδές του, ενώ, στο μεταξύ, μελέτησε Μαθηματικά και είναι από τους πρώτους που διδάχτηκε το ηλιοκεντρικό σύστημα του Κοπέρνικου. Το 1594 έγινε καθηγητής Μαθηματικών και Αστρονομίας στην Ανώτερη Σχολή του Γκρατς, από όπου δημοσίευσε, το 1596, και την πρώτη του αστρονομική μελέτη «Κοσμογραφικό Μυστήριο», που τον έκανε διάσημο. Λίγα χρόνια αργότερα, στην αυλή της Πράγας υπηρετούσε ως βοηθός του μεγάλου Δανού αστρονόμου Τίχο Μπράχε, του οποίου οι παρατηρήσεις του έδωσαν αφορμή να διατυπώσει τους φερώνυμους νόμους του (Κέπλερ) που διέπουν την κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο. Για την ανακάλυψη αυτών των τριών βασικών νόμων, στους οποίους στηρίχτηκε ο Νεύτων για τη διατύπωση του νόμου της παγκόσμιας έλξης, αποκλήθηκε «νομοθέτης του ουρανού». Ακόμα, συνέβαλε σημαντικά και σε άλλους τομείς της επιστήμης γενικότερα. Ιδιαίτερα χάρη στις μελέτες του γύρω από φαινόμενα της οπτικής χαρακτηρίστηκε ως ο «πατέρας της σύγχρονης οπτικής».