ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΓΕΩΡΓΟΠΟΥΛΟΣ
ΞΑΝΘΗ ΒΑΣΙΛΑΚΟΥ

"

- Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A$. Αν η εφαπτομένη στη C_f στο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta$, $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε: $f'(x_0) = \alpha$
- Στη (περίπου) κανονική κατανομή, το ποσοστό των παρατηρήσεων που η τιμή τους είναι μεγαλύτερη από $\bar{x} + s$, είναι $50\% - \frac{68}{2}\% = 16\%$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ: 1ο - 2ο - 3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Θέμα 1ο

Έστω μεταβλητή Χ με τιμές 7, ρ, 8, 12, μ, οι οποίες έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 10$ και συντελεστή μεταβολής $CV = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{26}{5}}$, $\left(\sqrt{5,2} \simeq 2,28\right)$

α. Να υπολογίσετε:
i) Τις τιμές ρ, μ
ii) Τη διάμεσο τιμή.
iii) Την τυπική απόκλιση των τιμών της μεταβλητής Χ, αν η καθεμιά από αυτές ελαττωθεί κατά 10%

β. Αν επιπλέον Ω είναι δειγματικός χώρος που αποτελείται από τα απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα 7, ρ, 8, 12, μ και f συνάρτηση με τύπο $f(x) = 9x^3 - 3\alpha x^2 + 4\alpha x + 2009$, $\alpha \in \Omega$, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
Α " η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ "
Β " η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M(0, f(0)) είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση: $y = \left(-\alpha^2 + 22\alpha - 80\right)x + 2$, $\alpha \in \Omega$ "
Γ " πραγματοποιείται μόνο το ενδεχόμενο Α "

Λύση

α. i) Έχουμε $CV = \frac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow s = CV \cdot \bar{x}$ οπότε $s = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{26}{5}} \cdot 10 \Leftrightarrow s = \sqrt{\frac{26}{5}}$ και επομένως $s^2 = \frac{26}{5}$, (1)

Ισχύει: $s^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 \Leftrightarrow s^2 = \frac{(7-10)^2 + (\rho-10)^2 + (8-10)^2 + (12-10)^2 + (\mu-10)^2}{5}$

$\Leftrightarrow s^2 = \frac{9 + (\rho-10)^2 + 4 + 4 + (\mu-10)^2}{5} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} (\rho-10)^2 + (\mu-10)^2 + 17 = \frac{26}{5} \cdot 5$

$\Leftrightarrow (\rho-10)^2 + (\mu-10)^2 = 9$, (2)

Ακόμη, $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{7 + \rho + 8 + 12 + \mu}{5} \overset{\bar{x}=10}{\Leftrightarrow} \rho + \mu + 27 = 50 \Leftrightarrow \rho + \mu = 23$, (3)

Η (2) λόγω της (3) γίνεται: $(\rho-10)^2 + (\rho-13)^2 = 9 \Leftrightarrow 2\rho^2 - 46\rho + 260 = 0 \Leftrightarrow \rho^2 - 23\rho + 130 = 0$ που έχει λύσεις ρ = 13 , ρ = 10, συνεπώς από (3) έχουμε: μ = 10 , μ = 13 αντιστοίχως.

ii) Οι τιμές της μεταβλητής Χ διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά είναι: 7, 8, 10, 12, 13, οπότε η διάμεσός τους δ ισούται με 10 (περιττό πλήθος).

iii) Αν x_i' είναι οι νέες τιμές της μεταβλητής Χ θα ισχύει: $x_i' = x_i - \frac{10}{100}x_i = 0,9x_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, οπότε

$s' = 0,9s = 0,9 \cdot \sqrt{\frac{26}{5}} \simeq 0,9 \cdot 2,28$, άρα $s \simeq 2,052$

β. Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{\,7,\ 8,\ 10,\ 12,\ 13\,\}$ και $\alpha \in \Omega$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x) = \left(9x^3 - 3\alpha x^2 + 4\alpha x + 2009\right)' = 27x^2 - 6\alpha x + 4\alpha$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 27x^2 - 6\alpha x + 4\alpha = 0$

Είναι $\Delta = (-6\alpha)^2 - 4 \cdot 27 \cdot 4\alpha = 36\alpha^2 - 432\alpha$. Επομένως για να είναι η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, πρέπει $f'(x) > 0$, οπότε $36\alpha^2 - 432\alpha < 0 \Leftrightarrow 36\alpha(\alpha - 12) < 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 12$. Αν α=0 ή α=12, δηλαδή Δ=0, η f είναι επίσης γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού τότε $f'(x) \geq 0$ (η ισότητα ισχύει μόνο όταν x=0 ή $\frac{4}{3}$)

Συνεπώς α=7, α=8, α=10, α=12 εφόσον $\alpha \in \Omega$, οπότε N(A)=4 και $P(A) = \frac{4}{5} = 0,8$ αφού N(Ω) = 5

Είναι $f'(0) = 27 \cdot 0^2 - 6\alpha \cdot 0 + 4\alpha = 4\alpha$, $\alpha \in \Omega$. Ισχύει $f'(0) = -\alpha^2 + 22\alpha - 80$ εφόσον η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M(0, f(0)) έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(0)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $y = \left(-\alpha^2 + 22\alpha - 80\right)x + 2$, $\alpha \in \Omega$ που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\alpha^2 + 22\alpha - 80$, οπότε:

$4\alpha = -\alpha^2 + 22\alpha - 80 \Leftrightarrow \alpha^2 - 18\alpha + 80 = 0$ που έχει λύσεις $\alpha = 10 \in \Omega$, $\alpha = 8 \in \Omega$, οπότε N(B)=2 και $P(B) = \frac{2}{5}$ αφού N(Ω) = 5

Είναι $A \cap B = \{8,\ 10\}$, άρα $N(A \cap B) = 2$, οπότε $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$, αφού N(Ω) = 5. Η πιθανότητα του ενδεχομένου Γ " πραγματοποιείται μόνο το Α " είναι $P(\Gamma) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

Θέμα 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=8s(\ln x)-2\bar{x}x+12,\ x>0$ όπου $\bar{x}>0$ και $\bar{x}\neq 5$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων ενός δείγματος μεγέθους ν. Αν η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο της $M(1,f(1))$ είναι παράλληλη προς την ευθεία y = 2, τότε:

α. Να βρείτε την παράγωγο f' της f και να δείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

β. Να δείξετε ότι για να γίνει ομοιογενές το δείγμα θα πρέπει κάθε τιμή των παρατηρήσεων να αυξηθεί τουλάχιστον κατά 6s

γ. Ποιες οι τιμές των $\bar{x}$ και s των παρατηρήσεων του δείγματος όταν η f έχει ακρότατο το οποίο βρίσκεται στην ευθεία $y=-4$

δ. Για $\bar{x}=8$, $s=2$, να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων όταν η κατανομή είναι περίπου κανονική και 40 παρατηρήσεις έχουν τιμή τουλάχιστον 10

Λύση

α. Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε x>0 με $f'(x)=\left[8s(\ln x)-2\bar{x}x+12\right]'=\dfrac{8s-2\bar{x}x}{x},\ (1)$

Είναι $f'(1)=0,\ (2)$ αφού η εφαπτομένη στην καμπύλη της f στο M έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(1)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία y = 2 που έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = 0 (ως παράλληλη με τον x'x).

Από (1), (2) έχουμε $8s-2\bar{x}=0 \Leftrightarrow 2\bar{x}=8s \Leftrightarrow \dfrac{s}{\bar{x}}=\dfrac{1}{4}=0{,}25$ ή 25% > 10% οπότε CV > 10%,

άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

β. Αν κ είναι η αύξηση για κάθε μια τιμή των παρατηρήσεων, τότε οι νέες τιμές είναι $x_i'=x_i+\kappa,\ i=1,2,\dots,\nu$ οπότε ισχύουν $\bar{x}'=\bar{x}+\kappa$ και $s'=s$.

Ο συντελεστής μεταβολής του ομοιογενούς πλέον δείγματος είναι CV΄ για τον οποίο θα ισχύει:

$$CV'\le 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{s'}{\bar{x}'}\le 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}+\kappa}\le 0{,}1 \overset{\bar{x}+\kappa>0}{\Leftrightarrow} s\le 0{,}1\bar{x}+0{,}1\kappa \overset{\alpha.}{\Leftrightarrow} s\le 0{,}1(4s)+0{,}1\kappa$$

$$\Leftrightarrow 0{,}6s\le 0{,}1\kappa \Leftrightarrow \kappa\ge 6s$$

γ. Είναι $f'(x)=\dfrac{8s-2\bar{x}x}{x}$, άρα $f'(x)=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 8s-2\bar{x}x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{4s}{\bar{x}}$ και

$f'(x)>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 8s-2\bar{x}x>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{4s}{\bar{x}}$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\dfrac{4s}{\bar{x}}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\dfrac{4s}{\bar{x}},+\infty\right)$

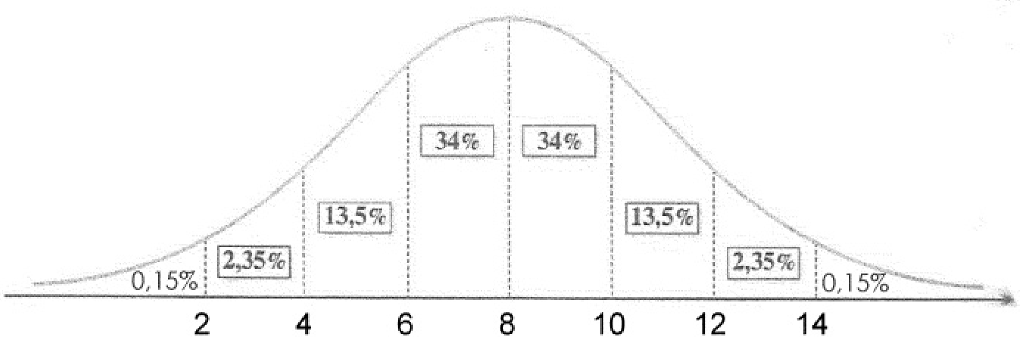
Παρουσιάζει επομένως μέγιστη τιμή στο $x_o=\dfrac{4s}{\bar{x}}$, το $f\left(\dfrac{4s}{\bar{x}}\right)\overset{\alpha.}{=}f(1)$.

Το μέγιστο f(1) ανήκει στην ευθεία $y=-4$ όταν ισχύει:

$f(1)=-4 \Leftrightarrow 8s\ln 1-2\bar{x}+12=-4 \Leftrightarrow -2\bar{x}=-16 \Leftrightarrow \bar{x}=8$

Έτσι: $\begin{cases}\bar{x}=4s\\ \bar{x}=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\bar{x}=8\\ s=2\end{cases}$

δ. Υπολογίζοντας τα ποσοστά των τιμών του δείγματος στα έξι επιμέρους διαστήματα και τοποθετώντας τις τιμές στο διάγραμμα συχνοτήτων (κανονική κατανομή) έχουμε:



Παρατηρούμε ότι το ποσοστό των παρατηρήσεων που ξεπερνούν την τιμή 10 είναι: $50\%-\dfrac{68}{2}\%=16\%$

Άρα έχουμε $\nu=\dfrac{40\cdot 100}{16}=250$ παρατηρήσεις.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΛΕΟΝΑΡΝΤΟ ΠΙΖΑΝΟ ΦΙΜΠΟΝΑΤΣΙ (1170-1240)

Ιταλός μαθηματικός που σημάδεψε την επιστήμη του με τη διάδοση στην Ευρώπη των ινδοαραβικών αριθμητικών συμβολισμών και της φερώνυμη μαθηματικής ακολουθίας. Πατρίδα του ήταν μεν η Πίζα, όπως δείχνει το δεύτερο επώνυμό του αλλά στην ουσία ήταν όλος ο τότε γνωστός κόσμος, αφού διαρκώς ταξίδευε σ΄αυτόν για εμπορικές δουλειές. Τον απορρόφησε ωστόσο η ενασχόληση με την έρευνα πάνω στην αριθμητική, τη γεωμετρία και την τριγωνομετρία, οπότε όταν επέστρεψε στην Πίζα, το 1202, έγραψε το πιο γνωστό βιβλίο του, το «Βιβλίο του άβακα». Στο βιβλίο αυτό, που αναθεωρημένο επανεκδόθηκε και το 1228 ο Φιμπονάτσι κάνει ευρεία χρήση των ινδοαραβικών ψηφίων επιβάλλοντάς τα έτσι στην Ευρώπη, ενώ διατυπώνει και την ακολουθία των αριθμών, της οποίας οι δυο πρώτοι όροι είναι ίσοι με 1 και κάθε άλλος όρος είναι ίσος με το άθροισμα των δυο προηγούμενων. Το βιβλίο χάθηκε για αιώνες, ώσπου ανασύρθηκε από την αφάνεια τον 17ο αιώνά, οπότε αξιολογήθηκαν οι εργασίες του Φιμπονάτσι ως πρωτοποριακές, Από το 1962 λειτουργεί στην Καλιφόρνια των ΗΠΑ εταιρεία που προωθεί την έρευνα πάνω στους αριθμούς του Φιμπονάτσι.