ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΤΑΣΟΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ
ΝΙΚΟΣ ΖΑΧΟΠΟΥΛΟΣ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ
ΝΙΚΟΣ ΚΟΚΟΛΗΣ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΝΟΥΛΗΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ

«Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο Δ⊆R. Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών $x_1, x_2 \in \Delta$ της εξίσωσης f(x)=0, υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f′(x)=0.

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE - ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ- ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ Θ.Μ.Τ.

Θέμα 1°

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [0, 1] τέτοια ώστε $ef(0) - f(1) = 2(e-1)$, $f(0) \neq 0$, $f'(0) = -2$ και $f''(x) \neq f'(x)$ για κάθε $x \in (0,1)$. Να δείξετε ότι:

α. Η εξίσωση $f'(x) + 2 = f(x)$ (1), έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_o στο $(0,1)$.

β. Η ρίζα x_o της εξίσωσης (1) είναι μοναδική.

γ. Υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $|f''(\xi)| > |f(x_o)|$.

Λύση

α. $f'(x) + 2 = f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) + 2 = 0 \overset{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} e^x f'(x) - e^x f(x) + 2e^x = 0 \Leftrightarrow$

$$e^x\left(f(x)-2\right)' - \left(f(x)-2\right)\left(e^x\right)' = 0 \overset{e^{2x}\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{e^x\left(f(x)-2\right)' - \left(f(x)-2\right)\left(e^x\right)'}{e^{2x}} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)-2}{e^x}\right)' = 0.$$

Επομένως, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)-2}{e^x}$, $x \in [0,1]$, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την $g'(x) = 0$, $x \in (0,1)$.

Η g είναι συνεχής στο [0, 1] και παραγωγίσιμη στο (0, 1), αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [0, 1] και η e^x είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Ακόμη $g(0) = f(0) - 2$ και $g(1) = \frac{f(1)-2}{e}$.

Όμως $ef(0) - f(1) = 2(e-1) \Leftrightarrow ef(0) - 2e = f(1) - 2 \Leftrightarrow f(0) - 2 = \frac{f(1)-2}{e}$ άρα $g(0) = g(1)$.

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_o) = 0$ δηλαδή η εξίσωση $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 2 = f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_o \in (0,1)$.

β. Έστω ότι η εξίσωση $f'(x) + 2 = f(x)$ έχει και δεύτερη ρίζα $x_1 \neq x_o$ με $x_1 \in (0,1)$ και $x_1 < x_o$ (ομοίως αν $x_1 > x_0$).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f'(x) + 2 - f(x)$, $x \in [x_1, x_o]$. Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_o]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_o) αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [0, 1] και $[x_1, x_o] \subseteq (0,1)$. Ακόμη $h(x_o) = h(x_1) = 0$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\rho \in (x_1, x_o) \subseteq (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $h'(\rho) = 0$.

Όμως $h'(x) = f''(x) - f'(x)$ άρα $f''(\rho) - f'(\rho) = 0 \Leftrightarrow f''(\rho) = f'(\rho)$, που είναι άτοπο αφού $f''(x) \neq f'(x)$, για κάθε $x \in (0,1)$. Επομένως η ρίζα $x_o \in (0,1)$ είναι μοναδική.

γ. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[0, x_o] \subseteq [0,1)$ αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [0, 1].

Επομένως σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x_o) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$f''(\xi) = \frac{f'(x_o) - f'(0)}{x_o} \overset{\text{υποθ.}}{\underset{\alpha}{\Leftrightarrow}} f''(\xi) = \frac{f(x_o) - 2 + 2}{x_o} \Leftrightarrow f''(\xi) = \frac{f(x_o)}{x_o}.$$

Συνεπώς $|f''(\xi)| = \left|\frac{f(x_o)}{x_o}\right| = \frac{|f(x_o)|}{x_o} > |f(x_o)|$, αφού $x_o \in (0,1)$.

Θέμα 2°

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ τέτοια, ώστε $4f'(x) + f^2(x)\sigma\upsilon\nu x = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

α. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{4}{\eta\mu x + 4}$, $x \in \mathbb{R}$.

β. Αν g είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{g(x)}\cdot g'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

i. $\frac{1}{5}\le\frac{e^{g(x)}-e^{g(x-1)}}{4}\le\frac{1}{3}$, $x\in\mathbb{R}$.

ii. Η εξίσωση $e^{g(x)}-\frac{5}{2}x+1=0$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

Λύση

α. $4f'(x)+f^2(x)\text{συν}x=0 \Leftrightarrow 4f'(x)=-f^2(x)\text{συν}x \overset{f(x)\neq0}{\Leftrightarrow} 4\left(-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right)=\text{συν}x \Leftrightarrow$

$4\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=(\text{ημ}x)' \Leftrightarrow \left(\frac{4}{f(x)}\right)'=(\text{ημ}x)'$ (1). Οι συναρτήσεις $\frac{4}{f(x)}$, ημx είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ οπότε από την (1) προκύπτει:

$\frac{4}{f(x)}=\text{ημ}x+c,\ c\in\mathbb{R}$, που για $x=0$ θα ισχύει $\frac{4}{f(0)}=c$. Όμως f(0) = 1, άρα c = 4.

Επομένως

$\frac{4}{f(x)}=\text{ημ}x+4 \Leftrightarrow f(x)=\frac{4}{\text{ημ}x+4}$, $x\in\mathbb{R}$.

β. i. $e^{g(x)}\cdot g'(x)=f(x) \Leftrightarrow \left(e^{g(x)}\right)'=f(x)$. Θεωρούμε $e^{g(x)}=h(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $h'(x)=f(x)$ (2).

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο [x – 1, x], $x\in\mathbb{R}$.

Έτσι σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την h στο [x – 1, x] υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(x-1,x)$ τέτοιο, ώστε $h'(x_o)=\frac{h(x)-h(x-1)}{x-(x-1)}=h(x)-h(x-1)$.

Τότε από (2) προκύπτει: $f(x_o)=h(x)-h(x-1) \Leftrightarrow f(x_o)=e^{g(x)}-e^{g(x-1)}$.

Όμως από το ερώτημα α. έχουμε:

$f(x)=\frac{4}{\text{ημ}x+4}$ και

$-1\le\text{ημ}x\le1 \Leftrightarrow 3\le\text{ημ}x+4\le5 \Leftrightarrow \frac{1}{5}\le\frac{1}{\text{ημ}x+4}\le\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{5}\le f(x)\le\frac{4}{3}$,

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ που για $x=x_o$ γίνεται $\frac{4}{5}\le f(x_o)\le\frac{4}{3}$.

Συνεπώς ισχύει $\frac{4}{5}\le e^{g(x)}-e^{g(x-1)}\le\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{5}\le\frac{e^{g(x)}-e^{g(x-1)}}{4}\le\frac{1}{3}$, $x\in\mathbb{R}$.

ii. Έστω ότι η εξίσωση $e^{g(x)}-\frac{5}{2}x+1=0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες τις ξ_1,ξ_2 με $\xi_1<\xi_2$ (ομοίως αν $\xi_1>\xi_2$).

Θεωρούμε $e^{g(x)}-\frac{5}{2}x+1=\varphi(x)$, $x\in[\xi_1,\xi_2]$. Η φ είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο στο $[\xi_1,\xi_2]\subseteq\mathbb{R}$ με $\varphi'(x)=e^{g(x)}.g'(x)-\frac{5}{2}$ (3), [οι συναρτήσεις $e^{g(x)}$ (σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων), $1-\frac{5}{2}x$ είναι παραγωγίσιμες]. Ακόμη $\varphi(\xi_1)=\varphi(\xi_2)=0$, επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την φ στο $[\xi_1,\xi_2]$. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$\varphi'(\rho)=0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} e^{g(\rho)}g'(\rho)-\frac{5}{2}=0 \overset{\text{υποθ.}}{\Leftrightarrow} f(\rho)=\frac{5}{2}$ που είναι άτοπο αφού $\frac{4}{5}\le f(x)\le\frac{4}{3}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η εξίσωση $e^{g(x)}-\frac{5}{2}x+1=0$ έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΜΙΣΕΛ ΡΟΛ (1652-1719)

Γάλλος μαθηματικός, από τους κορυφαίους μελετητές του απειροστικού και διαφορικού λογισμού. Μελέτησε καλά από μικρός τις γνωστές μέχρι την εποχή του αλγοριθμικές μεθόδους, καθώς και τις θεωρίες απειροστικού λογισμού και στα 1685 έγινε μέλος της Ακαδημίας Επιστημών του Παρισιού. Πάταγο, όμως, έκανε στα 1690 όταν δημοσίευσε το έργο «Πραγματεία περί της Άλγεβρας» («Traite d'algebre» γαλλιστί). Εκεί ανέπτυξε τη μέθοδο του διαχωρισμού των πραγματικών ριζών αλγεβρικών εξισώσεων, που βασίζεται στη μερική περίπτωση του ομώνυμου θεωρήματος του Rolle. Από τις αρχές του 18ου αιώνα μέχρι το θάνατό του και με επίκεντρο πάντα τους παριζιάνικους επιστημονικούς κύκλους, ο Michel Rolle βρισκόταν διαρκώς σε μετωπική σύγκρουση με τους υποστηρικτές του απειροστικού λογισμού του Λάιμπνιτς, ενώ ταυτόχρονα δημοσίευε μελέτες για τις ακέραιες λύσεις απροσδιόριστων γραμμικών εξισώσεων με δυο αγνώστους.