ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΤΑΣΟΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΥΡΙΑΚΟΥΛΗΣ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ
ΝΙΚΟΣ ΖΑΧΟΠΟΥΛΟΣ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΥΡΙΑΖΗΣ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΔΙΟΛΙΤΣΗΣ

“

- Ένα δείγμα παρατηρήσεων μεγέθους ν, μιας μεταβλητής Χ, είναι ομοιογενές όταν $CV \le 0{,}1$ ή 10% όπου CV ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος.
- Αν $x_i' = \alpha x_i + \beta$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ τότε $\bar{x}' = \alpha\bar{x} + \beta$ και $s' = |\alpha| s$, όπου $\bar{x}, s$ η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντιστοίχως των τιμών x_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ μιας μεταβλητής Χ.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Θέμα 1ο

Έστω μεταβλητή Χ με τιμές 4, κ, 8, 9, λ, οι οποίες έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 6$ και συντελεστή μεταβολής $CV = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{34}{5}}$

α) Να υπολογίσετε:
i) Τις τιμές κ, λ
ii) Τη διάμεσο τιμή.
iii) Την τυπική απόκλιση των τιμών της μεταβλητής Χ, αν η κάθε μία από αυτές αυξηθεί κατά 20%

β) Αν επιπλέον Ω είναι ο δειγματικός χώρος που αποτελείται από τα απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα 4, κ, 8, 9, λ
και f η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{\ell n x}{x} + \alpha^2 - 11\alpha + 28$, $\alpha \in \Omega$, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
Α “ η f έχει ακρότατο που βρίσκεται στην ευθεία $y = \frac{1}{e}$”
Β “ f(1)>0 ”

Λύση

α) i) Είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow s = CV \cdot \bar{x}$ οπότε $s = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{34}{5}} \cdot 6 \Leftrightarrow s = \sqrt{\frac{34}{5}}$ και επομένως

$s^2 = \frac{34}{5}$ (1).

Όμως $s^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 \Leftrightarrow s^2 = \frac{(4-6)^2 + (\kappa-6)^2 + (8-6)^2 + (9-6)^2 + (\lambda-6)^2}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s^2 = \frac{4 + (\kappa-6)^2 + 4 + 9 + (\lambda-6)^2}{5} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} (\kappa-6)^2 + (\lambda-6)^2 + 17 = \frac{34}{5} \cdot 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\kappa-6)^2 + (\lambda-6)^2 = 17$ (2).

Ακόμη $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{4 + \kappa + 8 + 9 + \lambda}{5} \overset{\bar{x}=6}{\Leftrightarrow} \kappa + \lambda + 21 = 30 \Leftrightarrow \kappa + \lambda = 9$ (3).

Η (2) λόγω της (3) γίνεται:
$(\kappa-6)^2 + (\kappa-3)^2 = 17 \Leftrightarrow 2\kappa^2 - 18\kappa + 28 = 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - 9\kappa + 14 = 0$ που έχει λύσεις
$\kappa = 2$, $\kappa = 7$ άρα από (3) έχουμε $\lambda = 7$, $\lambda = 2$ αντιστοίχως.

ii) Οι τιμές της μεταβλητής Χ σε αύξουσα σειρά είναι 2, 4, 7, 8, 9 οπότε η διάμεσός τους δ ισούται με 7 (λόγω περιττού πλήθους).

iii) Αν x_i' είναι οι νέες τιμές της μεταβλητής Χ θα ισχύει

$x_i' = \frac{20}{100}x_i + x_i = 1{,}2x_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, οπότε $s' = 1{,}2s = 1{,}2 \cdot \sqrt{\frac{34}{5}}$.

β) Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{2, 4, 7, 8, 9\}$ και $\alpha \in \Omega$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$f'(x) = \left(\frac{\ell n x}{x}\right)' + \left(\alpha^2 - 11\alpha + 28\right)' = \frac{1 - \ell n x}{x^2}, x > 0$.

Θέτουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ell n x}{x^2} = 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 1 - \ell n x = 0 \Leftrightarrow x = e$.

Έτσι αν $f'(x) > 0$ τότε $\frac{1 - \ell n x}{x^2} > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ell n x < 1 \Leftrightarrow x < e$, οπότε ο πίνακας μεταβολών της f και προσήμου της f′ είναι:

x	0	e	+∞
f′(x)	+	0	–
f(x)	↗		↘

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0, e], γνησίως φθίνουσα στο [e, +∞) και

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στο $x_o = e$ το $f(e) = \frac{1}{e} + \alpha^2 - 11\alpha + 28,\ \alpha \in \Omega$.

Το μέγιστο f(e) ανήκει στην ευθεία $y = \frac{1}{e}$ όταν ισχύει $f(e) = \frac{1}{e}$ άρα

$\frac{1}{e} + \alpha^2 - 11\alpha + 28 = \frac{1}{e} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\alpha^2 - 11\alpha + 28 = 0$ που δίνει λύσεις $\alpha = 4 \in \Omega$, $\alpha = 7 \in \Omega$, οπότε N(A) = 2 και

$P(A) = \frac{2}{5}$ αφού N(Ω) = 5.

Ακόμη: $f(1) = \alpha^2 - 11\alpha + 28$ και $f(1) > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 11\alpha + 28 > 0$, άρα $\alpha < 4$ ή $\alpha > 7$ με $\alpha \in \Omega$.

Επομένως α = 2, α = 8, α = 9, δηλαδή N(B) = 3 άρα $P(B) = \frac{3}{5}$

Θέμα 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\overline{x}\cdot x^2 - 16s\cdot x,\ x \in \mathbb{R}$ όπου $\overline{x} > 0$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων ενός δείγματος μεγέθους ν. Αν η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο της $M\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ είναι παράλληλη προς την ευθεία y = 3, τότε:

α) Να βρείτε την παράγωγο f' της f και να δείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.
β) Να δείξετε ότι για να γίνει ομοιογενές το δείγμα θα πρέπει κάθε τιμή των παρατηρήσεων να αυξηθεί τουλάχιστον κατά 2s.
γ) Ποιες οι τιμές των $\overline{x}$ και s των παρατηρήσεων του δείγματος ώστε η ελάχιστη τιμή της f να είναι ίση με −2;

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \left(2\overline{x}\cdot x^2 - 16s\cdot x\right)' = 4\overline{x}\cdot x - 16s$ (1).

Είναι $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ (2) αφού η εφαπτομένη στην καμπύλη της f στο M έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία y = 3 που έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = 0(ως παράλληλη με τον x'x).

Από (1), (2) έχουμε $4\overline{x}\cdot\frac{1}{2} - 16s = 0 \Leftrightarrow 2\overline{x} = 16s \Leftrightarrow \frac{s}{\overline{x}} = \frac{1}{8} = 0{,}125$ ή 12,5% > 10%,

άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

β) Αν c είναι η αύξηση για κάθε μια τιμή των παρατηρήσεων, τότε οι νέες τιμές θα είναι $x_i' = x_i + c,\ i = 1, 2, \ldots, \nu$ οπότε θα ισχύουν $\overline{x}' = \overline{x} + c$ και s΄ = s. Ο συντελεστής μεταβολής του ομοιογενούς πλέον δείγματος θα είναι CV΄για τον οποίο θα ισχύει:

$$CV' \le 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{s'}{\overline{x}'} \le 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{s}{\overline{x}+c} \le 0{,}1 \overset{\overline{x}+c>0}{\Leftrightarrow} s \le 0{,}1\overline{x} + 0{,}1c \overset{\alpha)}{\Leftrightarrow} s \le 0{,}1(8s) + 0{,}1c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}2s \le 0{,}1c \Leftrightarrow c \ge 2s.$$

γ) Είναι $f'(x) = 4\overline{x}\cdot x - 16s = 0 \overset{\overline{x}>0}{\Leftrightarrow} x = \frac{4s}{\overline{x}}$ και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{4s}{\overline{x}}$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{4s}{\overline{x}}\right]$, γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{4s}{\overline{x}}, +\infty\right)$

και παρουσιάζει επομένως ελάχιστη τιμή στο $x_o = \frac{4s}{\overline{x}}$ το $f\left(\frac{4s}{\overline{x}}\right)$.

Συνεπώς $\left(\text{επειδή } f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0\right)$ θα ισχύουν: $\frac{4s}{\overline{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{x} = 8s$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\overline{x}}{2} - 8s = -2$.

Έτσι: $\begin{cases} \overline{x} = 8s \\ \overline{x} - 16s = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{x} = 4 \\ s = \frac{1}{2} \end{cases}$

ΖΟΖΕΦ ΛΙΟΥΒΙΛ (1809-1882)

Γάλλος μαθηματικός, από τους διαπρεπέστερους και γονιμότερους ερευνητές του 19ου αιώνα. Εργάστηκε κυρίως στην αριθμοθεωρία, στην ανάλυση, στη διαφορική γεωμετρία και στις διαφορικές εξισώσεις. Το 1833 κατέλαβε καθηγητική έδρα στην Ecole Polytechnique και δίδαξε επίσης στο Κολλέγιο της Γαλλίας και στη Σχολή Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου του Παρισιού. Το 1836 ίδρυσε το «Περιοδικό καθαρών και εφαρμοσμένων μαθηματικών» που υπήρξε χρησιμότατο για τους Γάλλους μαθηματικούς, καθώς μέσα από αυτό γίνονταν γνωστές οι εργασίες τους. Από τα σημαντικότερα επιτεύγματά του είναι ότι πρώτος αυτός απέδειξε την ύπαρξη υπερβατικών αριθμών και προσδιόρισε μια ικανή συνθήκη για να είναι ένας αριθμός υπερβατικός. Γνωστά είναι επίσης η «ταυτότητα του Λιουβίλ», η «πολλαπλασιαστική αριθμητική συνάρτηση λ του Λιουβίλ» και πολλά άλλα εξαγόμενά του. Ασχολήθηκε ακόμα με τις διαφορικές εξισώσεις και τα συνοριακά προβλήματα που συναρτώνται με αυτές. Οι μέθοδοι που εφάρμοζε για την αντιμετώπισή τους είχαν τέτοια δυναμικότητα ώστε να εφαρμόζονται και στον 20ο αι. Τέλος, η μεγάλη παραγωγικότητά του υπήρξε χρήσιμη και στη στατική μηχανική, ένα από τα θεωρήματα της οποίας φέρει το όνομά του. Στο συγγραφικό του έργο περιλαμβάνονται 400 περίπου δημοσιεύματα, και από αυτά, τα περισσότερα αναφέρονται στην αριθμοθεωρία.