ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΝΙΚΟΣ ΖΑΧΟΠΟΥΛΟΣ
ΝΙΚΟΛΕΤΑ ΜΠΑΚΟΥ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ

- Στην ομαδοποίηση των τιμών των παρατηρήσεων ενός δείγματος, σε ν πλήθους κλάσεις ίσου πλάτους c, για τα άκρα των κλάσεων, ισχύουν:
  - $\alpha_i = \alpha_{i-1} + c,\ i = 1, 2, \ldots, \nu$
  - $\alpha_\nu - \alpha_0 = \nu c$
- Η διάμεσος δ, των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ (σε αύξουσα σειρά) ενός δείγματος, δίνεται από τον τύπο:

$$\delta = \frac{t_{\frac{\nu}{2}} + t_{\frac{\nu}{2}+1}}{2}$$, όταν ν: άρτιος

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ-ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ

Θέμα 1°

Στον (ελλιπή) πίνακα που ακολουθεί, παρουσιάζεται η κατανομή συχνοτήτων (απολύτων, σχετικών %, σχ. αθροιστικών %) των τιμών της θερμοκρασίας (σε °C), ομαδοποιημένων σε κλάσεις ίσου πλάτους, που σημειώθηκαν κατά τη χειμερινή περίοδο σε ν πλήθους ημέρες στην πόλη του Πειραιά.

Θερμοκρασίες(σε °C) Κλάσεις [.. –..)	ν_i	$f_i\%$	$F_i\%$
..... – 4	ν_1		
..... –	ν_2	25	
..... –	$4\nu_1$		75
..... –	ν_4		90
..... – 20]	ν_1		
Σύνολο	ν		–

α) Να βρείτε:
  i) Τα άκρα των κλάσεων.
  ii) Τις σχετικές συχνότητες $f_i\%$, i = 1, 3, 4, 5
  iii) Τις σχετικές αθροιστικές συχνότητες $F_i\%$, i = 1, 2, 5

β) Αν $\nu_1 = f(x_0)$, όπου x_0 : η θέση ολικού μεγίστου της συνάρτησης $f(x) = -2x^2 + 8x - 4,\ x \in \mathbb{R}$, τότε, να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα των (απολύτων) συχνοτήτων ν_i

γ) Για την τιμή ν_1 που υπολογίσατε στο β) ερώτημα, να βρείτε: (οι τιμές της θερμοκρασίας κατανέμονται ομοιόμορφα σε κάθε κλάση)
  i) Το πλήθος των ημερών της χειμερινής περιόδου, όπου σημειώθηκαν θερμοκρασίες από 9 °C έως 12 °C
  ii) Το ποσοστό των ημερών της χειμερινής περιόδου, όπου σημειώθηκαν θερμοκρασίες πάνω από 11 °C

Λύση

α) i) Έστω c το πλάτος καθεμιάς από τις πέντε κλάσεις και x το αριστερό άκρο της πρώτης από αυτές. Τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{cases} x + c = 4 \\ x + 5c = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + c = 4 \\ 4c = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

Έτσι τα άκρα των κλάσεων είναι 0, 4, 8, 12, 16, 20 και οι κλάσεις: [0, 4), [4, 8), [8, 12), [12, 16), [16, 20]

ii) Είναι $\nu_1 + \nu_2 + 4\nu_1 + \nu_4 + \nu_1 = \nu \Leftrightarrow 6\nu_1 + \nu_2 + \nu_4 = \nu \Leftrightarrow \frac{6\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + \frac{\nu_4}{\nu} = \frac{\nu}{\nu}$, όμως, $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$ και από τον πίνακα $f_2\% = 25 \Leftrightarrow f_2 = 0{,}25$. Άρα $6f_1 + f_2 + f_4 = 1 \overset{f_2=0,25}{\Leftrightarrow} 6f_1 + f_4 = 0{,}75$, (1)

Ακόμη από τον πίνακα: $f_4\% = F_4\% - F_3\% \Leftrightarrow f_4\% = 90 - 75$, άρα $f_4 = 0{,}15$, (2)

Οι (1), (2), δίνουν $f_1 = 0{,}1$

Οπότε, $f_1\% = 10$, $f_2\% = 25$, $f_3\% = 4f_1\% = 40$ (με τη βοήθεια της στήλης ν_i του πίνακα), $f_4\% = 15$, $f_5\% = f_1\% = 10$ (με τη βοήθεια της στήλης ν_i του πίνακα).

iii) Είναι $F_1\% = 10$, $F_2\% = f_1\% + f_2\% = 35$, $F_3\% = 75$, $F_4\% = 90$, $F_5\% = 100$

β) Η $f(x) = -2x^2 + 8x - 4$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με $f'(x) = -4x + 8,\ x \in \mathbb{R}$

Θέτουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Ακόμη: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -4x + 8 > 0 \Leftrightarrow x < 2$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$, οπότε παρουσιάζει στο $x_0 = 2$, ολικό μέγιστο το $f(2) = 4$

Επομένως, $\nu_1 = 4$

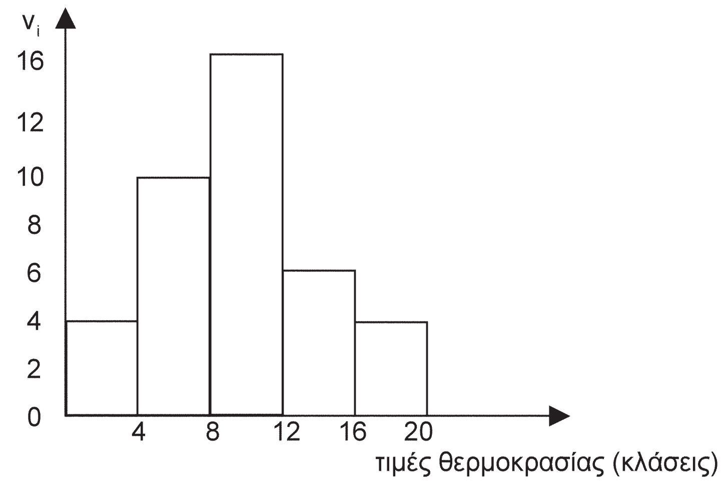
Υπολογίζουμε τις συχνότητες ν_i (καθώς και το πλήθος ν). Είναι:

$f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} \Leftrightarrow \nu = \frac{\nu_1}{f_1} = \frac{4}{0{,}10} = 40$, οπότε

$\nu_2 = \nu \cdot f_2 = 40 \cdot 0{,}25 = 10$, $\nu_3 = 4\nu_1 = 16$,

$\nu_4 = f_4 \cdot \nu = 0{,}15 \cdot 40 = 6$, $\nu_5 = \nu_1 = 4$

Συνεπώς κατασκευάζουμε το διπλανό ιστόγραμμα συχνοτήτων (απολύτων).



γ) i) Αφού οι τιμές της θερμοκρασίας που σημειώθηκαν κατά τη χειμερινή περίοδο, είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες μέσα στις κλάσεις (σε κάθε κλάση), τότε:

Το πλήθος των ημερών όπου σημειώθηκαν θερμοκρασίες από $9\,^\circ C$ έως $12\,^\circ C$, αποτελεί τα $\frac{3}{4}$ του πλήθους της κλάσης [8, 12). Επομένως το ζητούμενο πλήθος είναι: $\frac{3}{4}v_3 = \frac{3}{4}\cdot 16 = 12$,

άρα, τιμές θερμοκρασίας από $9\,^\circ C$ έως $12\,^\circ C$, σημειώθηκαν σε 12 ημέρες της χειμερινής περιόδου.

ii) Το πλήθος των ημερών όπου σημειώθηκαν θερμοκρασίες από $11\,^\circ C$ έως $12\,^\circ C$, αποτελεί το $\frac{1}{4}$ του πλήθους της κλάσης [8, 12) και αντιστοιχεί σε ποσοστό $\frac{1}{4}f_3\% = \frac{1}{4}40 = 10$

Το πλήθος των ημερών όπου σημειώθηκαν θερμοκρασίες πάνω από $12\,^\circ C$, είναι $v_4 + v_5 = 6 + 4 = 10$ και αντιστοιχεί σε ποσοστό $f_4\% + f_5\% = 15 + 10 = 25$. Συνεπώς: το ποσοστό των ημερών της χειμερινής περιόδου, όπου σημειώθηκαν θερμοκρασίες πάνω από $11\,^\circ C$, είναι 35%

Θέμα 2°

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \left(\frac{\lambda^2 - 11\lambda + 24}{\lambda}\right)e^x,\ x \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{N}^*$ και $g(x) = (\kappa - 12)\sigma\upsilon\nu x,\ x \in \mathbb{R},\ \kappa \in \mathbb{N}^*,\ \kappa > 7$

Ισχύουν: i) $f(0) < 0$ και ii) ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στη καμπύλη της g στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, είναι θετικός αριθμός.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των λ, κ που προκύπτουν.

β) Οι τιμές των λ, κ του ερωτήματος α), αν τοποθετηθούν σε αύξουσα σειρά, αποτελούν τις συχνότητες (απόλυτες) v_i. των τιμών x_i αντιστοίχως, με $x_i = 3i - 2,\ i = 1, 2, 3, \ldots$ ενός δείγματος $t_1, t_2, \ldots, t_v$ παρατηρήσεων. Να βρείτε:

i) Το μέγεθος v του δείγματος καθώς και τις τιμές x_i των παρατηρήσεων t_i

ii) Το πλήθος και το ποσοστό των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \ldots, t_v$, που οι τιμές τους είναι μεγαλύτερες του 3 αλλά μικρότερες του 13

iii) Τη μέση τιμή και τη διάμεσο του δείγματος των παρατηρήσεων t_i

Λύση

α) Είναι:

$f(0) = \frac{\lambda^2 - 11\lambda + 24}{\lambda}$ (αφού $e^x = 1$ για $x = 0$). Έτσι, $f(0) < 0 \overset{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} \lambda^2 - 11\lambda + 24 < 0 \Leftrightarrow 3 < \lambda < 8$ με $\lambda \in \mathbb{N}^*$,

άρα, $\lambda = 4, 5, 6, 7$. Ακόμη, η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $g'(x) = -(\kappa - 12)\eta\mu x = (12 - \kappa)\eta\mu x$

Όμως, ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, είναι θετικός αριθμός, δηλαδή $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$

Συνεπώς: $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow 12 - \kappa > 0 \Leftrightarrow \kappa < 12$ (αφού $\eta\mu\frac{\pi}{2} = 1$) με $\kappa \in \mathbb{N}^*$ και $\kappa > 7$, άρα $\kappa = 8, 9, 10, 11$

β) Οι τιμές των λ, κ τοποθετημένες σε αύξουσα σειρά είναι $4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$, οπότε:

$v_1 = 4,\ v_2 = 5,\ v_3 = 6,\ v_4 = 7,\ v_5 = 8,\ v_6 = 9,\ v_7 = 10,\ v_8 = 11$. Έτσι οι τιμές x_i, των παρατηρήσεων t_i του δείγματος, είναι πλήθους 8, δηλαδή: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$

i) Μέγεθος δείγματος: $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_8 = 4 + 5 + \ldots + 11 = 60$ παρατηρήσεις.

Από την υπόθεση ισχύει $x_i = 3i - 2,\ i = 1, 2, 3, \ldots$, επομένως, υπολογίζοντας τις τιμές x_i, έχουμε:

$x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = 7,\ x_4 = 10,\ x_5 = 13,\ x_6 = 16,\ x_7 = 19,\ x_8 = 22$

ii) Το ζητούμενο πλήθος είναι: $v_2 + v_3 + v_4 = 5 + 6 + 7 = 18$ παρατηρήσεις, ενώ το ζητούμενο ποσοστό είναι: $\frac{v_2 + v_3 + v_4}{v}\cdot 100\% = \frac{5 + 6 + 7}{60}\cdot 100\% = 30\%$

iii)
- Η μέση τιμή $\bar{x}$ των $t_1, t_2, \ldots, t_{60}$, δίνεται από τον τύπο:

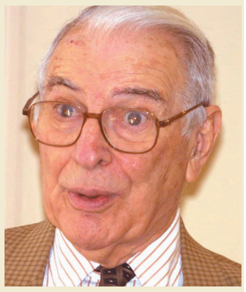
  $\bar{x} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{8} x_i v_i$, οπότε: $\bar{x} = \frac{1}{60}(1\cdot 4 + 4\cdot 5 + 7\cdot 6 + 10\cdot 7 + 13\cdot 8 + 16\cdot 9 + 19\cdot 10 + 22\cdot 11) = \frac{816}{60} = 13{,}6$

- Η διάμεσος δ των $t_1, t_2, \ldots, t_{60}$, είναι:

  $\delta = \frac{t_{30} + t_{31}}{2} = \frac{13 + 16}{2} = 14{,}5$, αφού, αυτή αποτελεί τη μέση τιμή των δύο μεσαίων παρατηρήσεων του πλήθους των (σε αύξουσα σειρά), που είναι άρτιο.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΚΕΝΕΘ ΤΖΟΖΕΦ ΑΡΡΟΟΥ (1921)



Αμερικανός μαθηματικός και οικονομολόγος που τιμήθηκε το 1972 με το Νόμπελ Οικονομίας. Εργάστηκε ως ερευνητής στο Κολούμπια, ενώ δίδαξε Οικονομία και Στατιστική στο Στάνφορντ και το Χάρβαρντ. Η αναλυτική του θεωρία με τη χρήση πολλών μαθηματικών και στατιστικών μεθόδων συντέλεσε στην κατανόηση πλήθους οικονομικών αλλά και κοινωνικών μεγεθών. Ο Άρροου δεν περιορίστηκε στις μαθηματικές εξηγήσεις των προβλημάτων. Προχώρησε και στη θεμελίωση οικονομικής άποψης για τη διάρθρωση των κοινωνιών. Συγκρούστηκε μάλιστα με κορυφαίους οικονομολόγους όπως ο Σάμιουελσον, ο Τίντνερ, ο Μπέργκσον και άλλοι κατά τούτο: Ότι αν η επιλογή μιας κοινωνίας γίνεται ανάμεσα σε περισσότερες από δυο λύσεις, είναι αδύνατο κατά κανόνα να κατασκευαστεί παράσταση των προτιμήσεών της που να θεωρείται ότι αντιπροσωπεύει σωστά και πιστά τις προτιμήσεις όλων των μελών της για όλες τις δυνατές λύσεις. Αυτό είναι το περίφημο «θεώρημα του αδυνάτου», που σε πολιτική αντιστοίχιση απορρίπτει τα δικτατορικά μοντέλα και καλεί τα δημοκρατικά να δώσουν το βάρος στην έννοια της οργάνωσης των κοινωνιών, ώστε η στατιστική απεικόνιση των προτιμήσεων των πολιτών να γίνεται όσο το δυνατόν ασφαλέστερα.