ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ

“

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος (ενός πειράματος τύχης), που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα και A ένα ενδεχόμενο αυτού.

Τότε: $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$, όπου

$N(A)$: πλήθος στοιχείων του A

και $N(\Omega)$: πλήθος στοιχείων του Ω

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Θέμα 1ο

Έστω $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$ οι πιθανότητες πραγματοποίησης δύο μη ασυμβίβαστων ενδεχομένων A, B ενός δειγματικού χώρου Ω. Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A ισούται με $\frac{1}{3}$ και η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα A και B ισούται με $\frac{1}{x^2+2}$, $x\in\mathbb{R}$, τότε:

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f(x)=P(B)$

β) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της f ως προς x όταν $x=0$

γ) Να δείξετε ότι $6P(B)\le 1$

δ) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ''κανένα από τα ενδεχόμενα A, B δεν πραγματοποιείται'', όταν η $P(B)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

Λύση

α) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A είναι $P(A-B)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}$, (1)

και η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα A και B είναι:

$P(A\cup B)=\dfrac{1}{x^2+2}\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{1}{x^2+2}$, (2)

Οπότε η (2) λόγω της (1) γίνεται: $\dfrac{1}{3}+P(B)=\dfrac{1}{x^2+2}\Leftrightarrow P(B)=\dfrac{1}{x^2+2}-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow P(B)=\dfrac{1-x^2}{3(x^2+2)}$

Άρα, $f(x)=\dfrac{1-x^2}{3(x^2+2)}$

Είναι $0<P(B)\le 1$ (αφού $P(B)\neq 0$), άρα $0<\dfrac{1-x^2}{3(x^2+2)}\le 1$

Έτσι έχουμε: $\left(0<\dfrac{1-x^2}{3(x^2+2)} \text{ και } \dfrac{1-x^2}{3(x^2+2)}\le 1\right)\Leftrightarrow\left(0<1-x^2 \text{ και } \dfrac{1-x^2-3x^2-6}{3(x^2+2)}\le 0\right)\Leftrightarrow$

$\left(-1<x<1 \text{ και } -4x^2-5\le 0, \text{ ισχύει για κάθε } x\in\mathbb{R}\right)$ οπότε $-1<x<1$

Επομένως, $f(x)=\dfrac{1-x^2}{3(x^2+2)}$, $x\in(-1,1)$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1-x^2}{x^2+2}\right)'=\frac{1}{3}\cdot\frac{(1-x^2)'(x^2+2)-(1-x^2)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{-2x(x^2+2)-(1-x^2)2x}{(x^2+2)^2}=$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{-2x^3-4x-2x+2x^3}{(x^2+2)^2}=-\frac{2x}{(x^2+2)^2},\quad x\in(-1,1)$$

Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x είναι $f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+2)^2}$ και όταν $x=0$ γίνεται $f'(0)=0$

γ) Για $x\in(-1,1)$ είναι $f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+2)^2}$ οπότε $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ και $f'(x)>0\Leftrightarrow -2x>0\Leftrightarrow x<0$

αφού $(x^2+2)^2>0$, για κάθε $x\in(-1,1)$. Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1)$, άρα παρουσιάζει μέγιστη τιμή όταν $x=0$ την $f(0)=\frac{1}{6}$

Άρα για κάθε $x\in(-1,1)$ ισχύει $f(x)\le\dfrac{1}{6}\overset{\text{υποθ.}}{\Leftrightarrow}P(B)\le\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow 6P(B)\le 1$

δ) Έστω Γ το ενδεχόμενο: ΄΄ κανένα από τα A, B δεν πραγματοποιείται ΄΄, τότε $\Gamma=(A\cup B)'$ και

$P(\Gamma)=P\left[(A\cup B)'\right]=1-P(A\cup B)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$, αφού όταν $P(B)=\dfrac{1}{6}$ (μέγιστη τιμή της $P(B)$) είναι $x=0$,

άρα $P(A\cup B)=\dfrac{1}{0+2}=\dfrac{1}{2}$

X

x

Θέμα 2°

Έστω Ω δειγματικός χώρος που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα και A, B δύο ενδεχόμενα αυτού, τέτοια, ώστε $N(A)=60$, $A\cup B\neq\varnothing$

Αν η συνάρτηση $f(x)=\left[P(B-A)+2x\right]^2-4P(A\cup B)x$, $x\in\mathbb{R}$ έχει ελάχιστη τιμή μηδέν, τότε:

α) Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$ της $f(x)$

β) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε το πλήθος $N(\Omega)$ των στοιχείων του Ω καθώς και την $P(A\cup B')$, όταν $P(A\cup B)=\frac{3}{5}$

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$f'(x)=\left(\left[P(B-A)+2x\right]^2\right)'-\left[4P(A\cup B)x\right]'=2\left[P(B-A)+2x\right]\left[P(B-A)+2x\right]'-4P(A\cup B)=$$

$$4\left[P(B-A)+2x\right]-4P(A\cup B)=4\left[P(B)-P(B\cap A)+2x\right]-4\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]=$$

$$4\left[P(B)-P(B\cap A)-P(A)-P(B)+P(A\cap B)+2x\right]=4\left[-P(A)+2x\right]$$

Άρα $f'(x)=4\left[-P(A)+2x\right]$, $x\in\mathbb{R}$

β) Θέτουμε $f'(x)=0$,

οπότε ισοδύναμα έχουμε: $4\left[-P(A)+2x\right]=0 \Leftrightarrow x=\frac{P(A)}{2}$

Ακόμη,

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x>\frac{P(A)}{2}$ και $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<\frac{P(A)}{2}$

Συνεπώς, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,\frac{P(A)}{2}\right]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{P(A)}{2},+\infty\right)$

Επομένως, η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο $x=\frac{P(A)}{2}$, την $f\left(\frac{P(A)}{2}\right)=0$ (από υπόθεση).

γ) Από ερώτημα β) έχουμε:

$$f\left(\frac{P(A)}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[P(B-A)+2\frac{P(A)}{2}\right]^2-4P(A\cup B)\cdot\frac{P(A)}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left[P(B)-P(A\cap B)+P(A)\right]^2-2P(A\cup B)\cdot P(A)=0 \Leftrightarrow \left[P(A\cup B)\right]^2-2P(A\cup B)\cdot P(A)=0\Leftrightarrow$$

$P(A\cup B)\left[P(A\cup B)-2P(A)\right]=0$, οπότε,

$\left(P(A\cup B)=0\right.$ ή $\left.P(A\cup B)-2P(A)=0\right) \Leftrightarrow$

$\left(P(A\cup B)=0\right.$ αδύνατο από υπόθεση ή $\left.P(A\cup B)-2P(A)=0\right) \Leftrightarrow P(A\cup B)=2P(A)$, (1)

Όμως από υπόθεση $P(A\cup B)=\frac{3}{5}$, άρα η (1) δίνει:

$$P(A)=\frac{3}{10} \Leftrightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{10} \overset{\text{υποθ.}}{\Leftrightarrow} \frac{60}{N(\Omega)}=\frac{3}{10} \Leftrightarrow N(\Omega)=200$$

Είναι:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{5}\Leftrightarrow$$

$$P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{5}-\frac{3}{10}\Leftrightarrow P(B-A)=\frac{3}{10},\ (2)$$

και

$$P(A\cup B')=P(A)+1-P(B)-P(A\cap B')\Leftrightarrow P(A\cup B')=P(A)+1-P(B)-P(A)+P(A\cap B)\Leftrightarrow$$

$$P(A\cup B')=1-P(B)+P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cup B')=1-\left[P(B-A)\right]\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$P(A\cup B')=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$