

## ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:  
ΔΙΟΝΥΣΗΣ ΣΥΝΟΔΙΝΟΣ  
ΒΑΣΙΛΗΣ ΜΠΑΡΤΖΗΣ  
ΜΑΝΩΛΗΣ ΡΕΜΠΕΛΑΚΗΣ  
ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΑΝΤΑΛΟΓΛΟΥ  
ΛΑΜΠΡΟΣ ΣΤΑΘΗΣ



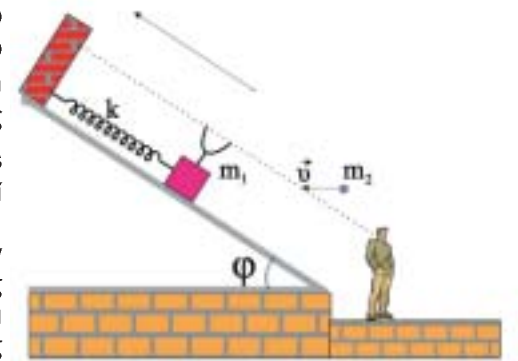
Το φαινόμενο Doppler αποτελεί «εργαλείο» έρευνας και μελέτης του Διαστήματος αφού λόγω της διαφοροποίησης του μήκους κύματος της ακτινοβολίας που εκπέμπει ένα άστρο και του μήκους κύματος που αντιλαμβανόμαστε στη Γη μπορούμε να εκτιμήσουμε την ταχύτητα του άστρου σε σχέση με τη Γη.

## ΦΥΣΙΚΗ

## ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ - ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER

Ένα σώμα  $\Sigma$  μάζας  $m_1 = 20\text{Kg}$  ισορροπεί πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης  $\varphi = 30^\circ$  αναρτημένο σε ιδανικό ελατήριο σταθεράς  $K = 100\text{N/m}$ . Το σώμα  $\Sigma$  έχει προσαρμοσμένο πάνω του διαπασών αμελητέας μάζας που προς το παρόν σιγεί. Ένα βλήμα μάζας  $m_2 = 10\text{Kg}$  κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα μέτρου  $u = \sqrt{30}\text{ m/s}$  σφηνώνεται στο σώμα  $\Sigma$  και το συσσωμάτωμα που σχηματίζεται εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση στο κεκλιμένο επίπεδο.

- α) Να βρείτε την κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης και να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο θεωρώντας ως αρχή μέτρησης του χρόνου ( $t = 0\text{s}$ ) τη στιγμή της κρούσης και θετική φορά τη φορά της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
- β) Να υπολογίσετε την απώλεια ενέργειας υπό μορφή θερμότητας κατά την κρούση.
- γ) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της i. ορμής του συσσωματώματος στις ακραίες θέσεις της απομάκρυνσης ii. κινητικής ενέργειας στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης καθώς και στις ακραίες θέσεις της απομάκρυνσης.
- δ) Να υπολογίσετε την δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στην ακραία αρνητική θέση της ταλάντωσης καθώς και τον ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης όταν το συσσωμάτωμα διέρχεται από αυτήν κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση.
- ε) Από το τράνταγμα κατά την κρούση το διαπασών αρχίζει να παράγει ήχο συχνότητας  $f_s = 1000\text{Hz}$ . Ο ήχος διαδίδεται προς δύο αντίθετες κατευθύνσεις. Στον ακίνητο παρατηρητή που βρίσκεται στην προέκταση της διακεκομμένης γραμμής του σχήματος 1 φθάνει ήχος αρχικά απευθείας από το διαπασών και κατόπιν ύστερα από ανάκλαση στον τοίχο στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου. Η συμβολή των δύο ήχων στο αυτί του παρατηρητή δημιουργεί διακρότημα. Υπολογίστε την συχνότητα του διακροτήματος καθώς και την συχνότητα του ήχου που ακούει ο παρατηρητής τη στιγμή που το συσσωμάτωμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας κινούμενο κατά τη θετική φορά (Μη λάβετε υπ' όψιν τον χρόνο διάδοσης του ήχου).



Σχήμα 1

Δίνεται:  $g = 10\text{m/s}^2$ ,  $u_{\text{ηχ}} = 340\text{m/s}$

## ΛΥΣΗ

- α) Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι:  $\omega = \sqrt{\frac{K}{m_1 + m_2}}$  ή  $\omega = \sqrt{\frac{10}{3}}\text{ rad/s}$

Για την πλαστική κρούση εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Ορμής του συστήματος σώματος  $\Sigma$  - βλήματος σε άξονα παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο παίρνουμε:

$$p_{\text{ολ},x}^{\text{αρχ}} = p_{\text{ολ},x}^{\text{τελ}} \quad \text{ή} \quad m_2 u \cdot \sin\varphi = (m_1 + m_2) V \quad \text{ή} \quad V = \frac{m_2 u \cdot \sin\varphi}{m_1 + m_2} \quad \text{ή} \quad V = 0,5\sqrt{10}\text{m/s}$$

Πριν την κρούση στη θέση ισορροπίας του σώματος  $\Sigma$  το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά  $d_1$ . Στο σώμα  $\Sigma$  ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος  $w_1$
- η κάθετη αντίδραση  $\vec{N}$
- η δύναμη του ελατηρίου  $\vec{F}_{\text{ελ}}$

Από τη συνθήκη ισορροπίας παίρνουμε:

$$w_1 \eta\mu\varphi = F_{\text{ελ}} \quad \text{ή} \quad m_1 g \cdot \eta\mu\varphi = K d_1 \quad \text{ή} \quad d_1 = \frac{m_1 g \cdot \eta\mu\varphi}{K} \quad \text{ή} \quad d_1 = 1\text{m}$$

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ισορροπεί σε νέα θέση όπου το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά  $d_2$  και γύρω από την οποία εκτελείται η ταλάντωση. Ομοίως από τη συνθήκη ισορροπίας παίρνουμε:

$$(w_1 + w_2) \eta\mu\varphi = K d_2 \quad \text{ή} \quad d_2 = \frac{(m_1 + m_2) g \eta\mu\varphi}{K} \quad \text{ή} \quad d_2 = 1,5\text{m}$$

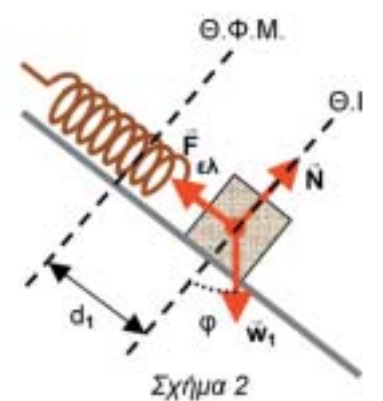
Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας της ταλάντωσης παίρνουμε:

$$K + U = E \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + \frac{1}{2}K(d_2 - d_1)^2 = \frac{1}{2}KA^2 \quad \text{ή} \quad A = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)V^2}{K} + (d_2 - d_1)^2} \quad \text{ή} \quad A = 1\text{m}$$

Τη στιγμή της κρούσης ( $t = 0\text{s}$ ) η απομάκρυνση του συσσωματώματος είναι:  $x = d_2 - d_1 = +0,5\text{m}$  και η ταχύτητα του:  $u_{t=0} = V = +0,5\sqrt{10}\text{ m/s} > 0$ .

Από την εξίσωση της απομάκρυνσης  $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$  για  $t = 0$  παίρνουμε:  $0,5 = 1\eta\mu\varphi_0$  ή  $\eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2}$

Επομένως ισχύει:  $\varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$  με  $\kappa \in \mathbb{Z}$  ή  $\varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$  με  $\kappa \in \mathbb{Z}$



Σχήμα 2

www.poukamisas.gr

**κάνουμε πράξη  
την τέχνη  
της διδασκαλίας**



Η διδασκαλία είναι τέχνη, μια τέχνη υψηλή. Η σωστή εφαρμογή της απαιτεί τη δημιουργία των κατάλληλων γι' αυτόν το σκοπό συνθηκών. Έτσι, η διδασκαλία στα Φροντιστήρια Πουκαμισάς πραγματοποιείται γύρω από ένα οβάλ τραπέζι, ώστε όλοι, καθηγητές και μαθητές, να αισθάνονται σαν μια ομάδα με κοινό στόχο και όραμα, οπότε και το διδακτικό αντικείμενο είναι εύληπτο και η ατμόσφαιρα διατηρείται "ζωντανή".

φροντιστήρια  
**ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ**

**ΖΑΝ ΝΤΟΜΙΝΙΚ ΦΡΑΝΣΟΥΑ ΑΡΑΓΚΟ (1786-1853)**



Γάλλος φυσικός, αστρονόμος αλλά και πολιτικός με σημαντικές επιτυχίες και στους τρεις τομείς. Από νεαρός, όταν μαζί με τον Ζαν Μπατίστ Μπιο έκανε μετρήσεις του τόξου του γίνιου μεσημβρινού, γνώρισε διώξεις από τους Ισπανούς, διότι τον θεώρησαν... κατάσκοπο των Γάλλων. Μέχρι και φυλακή τον πήγαν απ' όπου τον ελευθέρωσαν οι Αλγερινοί. Όταν γύρισε ελεύθερος στο Παρίσι, τοποθετήθηκε καθηγητής στο Πολυτεχνείο της πόλης και ανέλαβε... επίσημα πια επιστημονικό έργο. Ασχολήθηκε ιδιαίτερα με την οπτική και γρήγορα ανακάλυψε το φαινόμενο της κυκλικής πόλωσης του φωτός πάνω σε κρυστάλλους χαλαζία. Μέτρησε επίσης το δείκτη διάθλασης του αέρα και μερικών ακόμη αερίων, κάτι που του κόστισε σημαντική απώλεια της όρασής του! Ο Αραγκό διακρίθηκε ακόμη και στον τομέα της μηχανικής των ρευστών, ενώ πρόσφερε σημαντικές ανακαλύψεις στο φαινόμενο της μαγνητικής επαγωγής (πάνω στα πειράματά του έδωσε αργότερα τις ερμηνείες που έλειπαν ο Φουκό). Ως διευθυντής του Αστεροσκοπείου του Παρισιού, όπου τον τοποθέτησε ο Μέγας Ναπολέων, ερμήνευσε το φαινόμενο της στίλβης των αστέρων και πρώτος ανακάλυψε το 1840 την ηλιακή χρωμόσφαιρα. Ως πολιτικός και συγκεκριμένα ως υπουργός Στρατιωτικών κατάργησε το 1848 το δουλεμπόριο των μαύρων και την ποινή της μαστίγωσης στο πολεμικό ναυτικό.

Για  $\kappa = 0$  παίρνουμε:  $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$  ή  $\phi_0 = \frac{5\pi}{6}$

Από την εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης  $u = u_{\max} \sin(\omega t + \phi_0)$  για  $t = 0$  παίρνουμε:  $u_{t=0} = u_{\max} \sin \phi_0$

Για  $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$  προκύπτει:  $u_{t=0} = u_{\max} \sin \frac{\pi}{6} > 0$  ενώ για  $\phi_0 = \frac{5\pi}{6}$  προκύπτει:  $u_{t=0} = u_{\max} \sin \frac{5\pi}{6} < 0$

Τελικά καταλήγουμε πως:  $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$

Άρα για την εξίσωση της απομάκρυνσης παίρνουμε:  $x = 1\eta\mu \left( \sqrt{\frac{10}{3}}t + \frac{\pi}{6} \right)$  (S.I.)

β) Η θερμότητα που εκλύεται κατά την κρούση είναι:

$Q = K_{\text{αρχ}} - K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2}m_2u^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$  ή  $Q = 112,5\text{J}$

γ) i. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι:  $\frac{dp}{dt} = F_{\text{επ}} = -Kx$

Στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης όπου η απομάκρυνση είναι:  $x = \pm A$  για το ρυθμό μεταβολής της ορμής

παίρνουμε:  $\left( \frac{dp}{dt} \right)_{x=\pm A} = \mp KA$  ή  $\left( \frac{dp}{dt} \right)_{x=\pm A} = \mp 100 \text{ Kg} \cdot \text{m/s}^2$

ii. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:  $\frac{dK}{dt} = F_{\text{επ}}u$

Στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης ισχύει  $F_{\text{επ}} = 0$  και συνεπώς παίρνουμε:  $\left( \frac{dK}{dt} \right)_{x=0} = 0\text{J/s}$

Ομοίως για τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης όπου  $u = 0$  παίρνουμε:  $\left( \frac{dK}{dt} \right)_{x=\pm A} = 0\text{J/s}$

δ) Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου δίνεται από την σχέση  $U_{\text{ελ}} = \frac{1}{2}K(\Delta\ell)^2$  όπου  $\Delta\ell$  η επιμήκυνση του ελατηρίου μετρούμενη από την θέση του φυσικού μήκους του. Άρα στην κάτω θέση μέγιστης απομάκρυνσης για

τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου παίρνουμε:  $U_{\text{ελ}} = \frac{1}{2}k(d_2 + A)^2$  ή  $U_{\text{ελ}} = 312,5\text{J}$

Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου ισούται με το αντίθετο της ισχύος της δύναμης του

ελατηρίου αφού  $dU_{\text{ελ}} = -dW_{\text{ελ}}$ . Έτσι παίρνουμε:  $\frac{dU_{\text{ελ}}}{dt} = -\frac{dW_{\text{ελ}}}{dt} = -|F_{\text{ελ}}|V_T^{\max} \sin 180^\circ = kd_2V_T^{\max} = kd_2A\omega$

ή  $\frac{dU_{\text{ελ}}}{dt} = 50\sqrt{30} \text{ J/s}$

ε) Η ταχύτητα του διαπασών όταν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας κινούμενο κατά τη θετική φορά είναι:

$V_T = V_T^{\max} = A \cdot \omega$  ή  $V_T = V_T^{\max} = \sqrt{\frac{10}{3}}\text{m/s}$

Ο ήχος που φθάνει στον παρατηρητή απευθείας από την πηγή όταν αυτή διέρχεται από τη θέση ισορροπίας κινούμενη κατά τη θετική φορά έχει συχνότητα  $f_1 = \frac{u}{u_{\eta\chi} + V_T^{\max}} f_s$ . Ο ήχος που φθάνει στον παρατηρητή μετά

από ανάκλαση έχει συχνότητα  $f_2 = \frac{u}{u_{\eta\chi} - V_T^{\max}} f_s$  (αυτή που θα αντιλαμβανόταν ένας ακίνητος παρατηρητής

ευρισκόμενος στον τοίχο). Παρατηρούμε ότι οι δύο συχνότητες είναι διαφορετικές και συμβάλλοντας στο αυτί του παρατηρητή δημιουργούν διακρότημα με συχνότητα:

$f_\delta = |f_1 - f_2| = \frac{2u_{\eta\chi}V_T^{\max}}{u_{\eta\chi}^2 - (V_T^{\max})^2} f_s$  ή  $f_\delta = \frac{680\sqrt{\frac{10}{3}}}{340^2 - \frac{10}{3}} 1000\text{Hz}$

Η συχνότητα του ήχου που ακούει ο παρατηρητής έχει συχνότητα:

$\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{u_{\eta\chi}^2}{u_{\eta\chi}^2 - (V_T^{\max})^2} f_s$  ή  $\bar{f} = \frac{340^2}{340^2 - \frac{10}{3}} 1000\text{Hz}$

www.poukamisas.gr

**συνδυάζουμε τη δομή και την οργάνωση με την ποιότητα**



Τα Φροντιστήρια Πουκαμισάς είναι μια από τις ελάχιστες επιχειρήσεις, που διαθέτει **Σύστημα Ποιότητας EN ISO 9001:2000** όχι μόνο για την παροχή, αλλά κυρίως για το σχεδιασμό εκπαιδευτικών υπηρεσιών με την πιστοποίηση του διεθνούς φορέα LLOYD'S Register, που δίνεται μόνο σε επιχειρήσεις που διακρίνονται για τις υψηλότερες προδιαγραφές δομής και οργάνωσής τους. Φυσικό επακόλουθο είναι η εξασφάλιση της καλύτερης ποιότητας στην παροχή αυτών ακριβώς των υπηρεσιών.

φροντιστήρια **ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ**