ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΤΑΣΟΣ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΥΡΙΑΖΗΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΖΑΜΠΕΛΗΣ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΔΙΟΛΙΤΣΗΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ

«Έστω Α, Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω.

• Αν P(A)≤P(B) τότε δεν ισχύει πάντα ότι $A\subseteq B$ και

• Αν P(A)=1 τότε δεν ισχύει πάντα ότι Α=Ω

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Θέμα 1°

Έστω $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$ οι πιθανότητες πραγματοποίησης δύο μη ασυμβίβαστων ενδεχομένων Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω. Αν ισχύουν $P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=\frac{1}{6}$ και $P(A)+P(B)=\frac{2}{x^2+3}$, $x\in\mathbb{R}$, τότε:

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f(x)=2\cdot P(A\cap B)$.

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f ως προς x όταν x = 0.

γ) Να δείξετε ότι $4P(A\cap B)\leq 1$.

δ) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου "κανένα από τα ενδεχόμενα Α, Β δεν πραγματοποιείται", όταν η $P(A\cap B)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

Λύση

α) Είναι $P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=\frac{1}{6}\Leftrightarrow P(A-B)+P(B-A)=\frac{1}{6}$ (αφού $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$).

Οπότε

$$P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{6}\Leftrightarrow P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{1}{6}\quad(1).$$

Όμως $P(A)+P(B)=\frac{2}{x^2+3}$ άρα η (1) γίνεται

$$\frac{2}{x^2+3}-2P(A\cap B)=\frac{1}{6}\Leftrightarrow 2P(A\cap B)=\frac{2}{x^2+3}-\frac{1}{6}\Leftrightarrow 2P(A\cap B)=\frac{9-x^2}{6(x^2+3)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{9-x^2}{6(x^2+3)},\quad x\in\mathbb{R}\quad(2).$$

Είναι $0<P(A\cap B)<1$ (αφού Α, Β ασυμβίβαστα και $A\cap B\subset\Omega$), άρα

$$0<2P(A\cap B)<2\overset{(2)}{\Leftrightarrow}0<\frac{9-x^2}{6(x^2+3)}<2.$$

Έτσι έχουμε:

$$\left(0<\frac{9-x^2}{6(x^2+3)}\ \text{και}\ \frac{9-x^2}{6(x^2+3)}<2\right)\Leftrightarrow\left(0<9-x^2\ \text{και}\ \frac{9-x^2-12x^2-36}{6(x^2+3)}<0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(-3<x<3\ \text{και}\ -13x^2-27<0,\ \text{ισχύει για κάθε}\ x\in\mathbb{R}\right)\Leftrightarrow -3<x<3.$$

Επομένως, $f(x)=\frac{9-x^2}{6(x^2+3)}$ με $x\in(-3,3)$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο (– 3, 3) ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$f'(x)=\frac{1}{6}\left(\frac{9-x^2}{x^2+3}\right)'=\frac{1}{6}\cdot\frac{(9-x^2)'(x^2+3)-(9-x^2)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{-2x(x^2+3)-(9-x^2)2x}{(x^2+3)^2}=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{(x^2+3)^2}(x^2+3+9-x^2)=-\frac{4x}{(x^2+3)^2},\quad x\in(-3,3).$$

Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x είναι $f'(x)=-\frac{4x}{(x^2+3)^2}$ και όταν x = 0 γίνεται $f'(0)=0$.

γ) Για $x\in(-3,3)$ είναι $f'(x)=-\frac{4x}{(x^2+3)^2}$ οπότε $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ και

$f'(x)>0\Leftrightarrow -4x>0\Leftrightarrow x<0$

αφού $(x^2+3)^2>0$, για κάθε $x\in(-3,3)$. Συνεπώς, η f είναι γνησίως αύξουσα στο (– 3, 0] και γνησίως φθίνουσα στο [0, 3), άρα παρουσιάζει μέγιστη τιμή όταν x = 0 την $f(0)=\frac{1}{2}$.

Άρα για κάθε $x\in(-3,3)$ ισχύει $f(x)\leq\frac{1}{2}\overset{\text{υποθ.}}{\Leftrightarrow}2P(A\cap B)\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4P(A\cap B)\leq 1$.

δ) Έστω Γ το ενδεχόμενο: ΄΄ κανένα από τα Α, Β δεν πραγματοποιείται ΄΄, τότε Γ = (Α∪Β)΄
και $P(\Gamma)=P\left[(A\cup B)'\right]=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$ αφού
όταν $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$ (μέγιστη τιμή της $P(A\cap B)$) τότε $x=0$ και επομένως,
$P(A)+P(B)=\frac{2}{0+3}=\frac{2}{3}$.

Θέμα 2ο

Έστω Ω δειγματικός χώρος που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα και Α, Β δύο ενδεχόμενα αυτού, τέτοια, ώστε N(B) = 30, $P(B)\neq P(A\cap B)$.

Αν η συνάρτηση $f(x)=-\left[P(B)-2x\right]^2+4P(B-A)\left[P(A\cap B)-x\right]$, $x\in\mathbb{R}$ έχει μέγιστη τιμή μηδέν, τότε:

α) Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$ της f(x).

β) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε το πλήθος N(Ω) των στοιχείων του Ω όταν $P(A\cap B)=\frac{1}{9}$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$f'(x)=\left(-\left[P(B)-2x\right]^2\right)'+4P(B-A)\left[P(A\cap B)-x\right]'=-2\left[P(B)-2x\right]\left[P(B)-2x\right]'-4P(B-A)=$$
$$=4\left[P(B)-2x\right]-4P(B-A)=4\left[P(B)-P(B-A)-2x\right]=4\left[P(B)-P(B)+P(A\cap B)-2x\right]=$$
$$=4\left[P(A\cap B)-2x\right].$$

Άρα $f'(x)=4\left[P(A\cap B)-2x\right]$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Θέτουμε $f'(x)=0 \overset{\alpha)}{\Leftrightarrow} 4\left[P(A\cap B)-2x\right]=0 \Leftrightarrow x=\frac{P(A\cap B)}{2}$.

Ακόμη $f'(x)>0 \Leftrightarrow x<\frac{P(A\cap B)}{2}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,\frac{P(A\cap B)}{2}\right]$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{P(A\cap B)}{2},+\infty\right)$. Επομένως, η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή στο $x=\frac{P(A\cap B)}{2}$ την $f\left(\frac{P(A\cap B)}{2}\right)=0$ (από υπόθεση).

γ) Από ερώτημα β) έχουμε:

$$f\left(\frac{P(A\cap B)}{2}\right)=0 \Leftrightarrow -\left[P(B)-P(A\cap B)\right]^2+4P(B-A)\left[P(A\cap B)-\frac{P(A\cap B)}{2}\right]=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\left[P(B-A)\right]^2+2P(B-A)P(A\cap B)=0 \Leftrightarrow P(B-A)\left[2P(A\cap B)-P(B-A)\right]=0, \text{ οπότε}$$
$$\left(P(B-A)=0 \text{ ή } 2P(A\cap B)-P(B-A)=0\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(P(B)=P(A\cap B) \text{ αδύνατο από υπόθεση ή } 2P(A\cap B)-P(B)+P(A\cap B)=0\right)$$
$$\Leftrightarrow P(B)=3P(A\cap B) (1)$$

Όμως από υπόθεση $P(A\cap B)=\frac{1}{9}$ άρα η (1) δίνει:

$$P(B)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{1}{3} \overset{\text{υποθ.}}{\Leftrightarrow} \frac{30}{N(\Omega)}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow N(\Omega)=90.$$

ΠΙΕΡ ΝΤΕ ΦΕΡΜΑ (1601-1665)

Για νομικός ξεκίνησε στο πανεπιστήμιο της Τουλούζ αλλά από ...ψυχαγωγική διάθεση βρέθηκε να συνεργάζεται με τον Μπλεζ Πασκάλ στην πιθανοθεωρία και τον Ρενέ Ντεκάρτ στην αναλυτική γεωμετρία. Εργάστηκε επίσης σε θέματα στατικής και οπτικής και μια αρχή της γεωμετρικής οπτικής φέρει το όνομά του. Ο Φερμά συνήθιζε να ανακοινώνει τα ευρήματά του σε επιστολές προς τους συμπατριώτες του Γάλλους μαθηματικούς (ο ίδιος είχε βασκική καταγωγή), γι αυτό και το έργο του, που αργότερα συνέλεξε ο γιος του Σαμουέλ, έχει χαρακτήρα αποσπασμάτων από επιστημονική αλληλογραφία. Το πιο εντυπωσιακό θεώρημα του Φερμά - «η εικασία του Φερμά» - στην αριθμοθεωρία είναι αυτό το οποίο αποφαίνεται ότι το άθροισμα των νιοστών δυνάμεων των x και y είναι αδύνατο να είναι ίσο με τη νιοστή δύναμη του z - όπου x, y, z ακέραιοι διάφοροι του μηδενός - πάντα όταν ο ν είναι ακέραιος μεγαλύτερος από το 2. Ως προπομπός της αναλυτικής γεωμετρίας, αφού ήταν ο πρώτος που την εφάρμοσε στο χώρο των τριών διαστάσεων, ο Φερμά συνέβαλε τα μέγιστα στη μεθοδολογία του Ντεκάρτ, ώστε να συνταχθεί η περίφημη «καρτεσιανή γεωμετρία». Αξιοσημείωτη ήταν και η ανάπλαση διαφόρων χαμένων έργων Ελλήνων μαθηματικών που επιχείρησε ο Φερμά ως βαθύς γνώστης της ελληνικής γραμματείας που ήταν.