ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ

• Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 \in A_f$, όταν ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

• Ο ρυθμός μεταβολής μιας παραγωγίσιμης στο $x_0 \in A_f$ συνάρτησης f, ως προς x, όταν $x = x_0$, είναι $f'(x_0)$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θέμα 1°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2) + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα ψ'ψ στο σημείο Α(0, 3+ln2)

Α. Να βρείτε:
i. Το πεδίο ορισμού A_f της f
ii. Την τιμή του πραγματικού αριθμού α
iii. Την εφαπτομένη (ε) στην καμπύλη της f, που είναι κάθετη στην ευθεία (δ): $\psi = \frac{2}{3}x + 3$

Β. Αν $g(x) = \sqrt{x} - 1$, να βρείτε:
i. Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων g και f'g
ii. Την τιμή του πραγματικού μ ώστε η συνάρτηση
$$h(x) = \begin{cases} f'(x)g(x), & x \in [0,1) \cup (2,+\infty) \\ \mu, & x = 1 \end{cases},$$
να είναι συνεχής στο σημείο με τετμημένη $x_o = 1$

Λύση

Α. i. $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2) + \alpha$. Η f ορίζεται όταν $x^2 - 3x + 2 > 0$, επομένως $x < 1$ ή $x > 2$

Άρα $A_f = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

ii. Αφού το Α(0, 3+ln2) είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f, θα ισχύει: $f(0) = 3 + \ln 2$, δηλαδή $\ln 2 + \alpha = 3 + \ln 2$, οπότε $\alpha = 3$

iii. Έστω $M(x_o, f(x_o))$ το σημείο επαφής της γραφικής παράστασης της f με την ζητούμενη ευθεία (ε)

Αφού (ε) ⊥ (δ) θα ισχύει $\lambda_{(\varepsilon)}\lambda_{(\delta)} = -1$, άρα $\lambda_{(\varepsilon)} = -\frac{3}{2}$, ισοδύναμα $f'(x_o) = -\frac{3}{2}$,(1)

Όμως $f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$, $x \in (-\infty,1) \cup (2,+\infty)$, οπότε από (1) έχουμε: $\frac{2x_o - 3}{x_0^2 - 3x_o + 2} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$2(2x_o - 3) = -3(x_0^2 - 3x_o + 2) \Leftrightarrow 4x_o - 6 = -3x_0^2 + 9x_o - 6 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 5x_o = 0 \Leftrightarrow$

$x_0(3x_o - 5) = 0$, άρα $x_o = 0$ ή $x_o = \frac{5}{3}$

Η τιμή $\frac{5}{3}$ απορρίπτεται αφού $x_o \in (-\infty,1) \cup (2,+\infty)$

Επομένως $x_o = 0$, δηλαδή το σημείο επαφής είναι το Μ(0, 3+ln2) που είναι το σημείο Α της υπόθεσης.

Η ζητούμενη ευθεία (ε) έχει εξίσωση $\psi = -\frac{3}{2}x + \beta$ με Α∈(ε), άρα $3 + \ln 2 = -\frac{3}{2}\cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3 + \ln 2$

Επομένως (ε): $\psi = -\frac{3}{2}x + 3 + \ln 2$

Β. i. Είναι $A_g = [0, +\infty)$ και $A_{f'} = (-\infty,1) \cup (2,+\infty)$. Για το $A_{f'g}$, βρίσκουμε τα κοινά στοιχεία των $A_{f'}$ και A_g. Αυτά είναι οι πραγματικοί αριθμοί x, που είναι τέτοιοι ώστε $x \geq 0$ και $x \neq 1$, $x \neq 2$. Συνεπώς, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f'g είναι: $A_{f'g} = [0,1) \cup (2,+\infty)$

ii. Αφού η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = h(1) = \mu$,(2)

Αλλά:

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1}\frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{(x-1)(x-2)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(2x-3)\left[(\sqrt{x})^2 - 1^2\right]}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x}+1)} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(2x-3)(x-1)}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(2x-3)}{(x-2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2},(3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε $\mu = \frac{1}{2}$

Θέμα 2^{o}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\alpha x}$, $\alpha>0$, $x\in\mathbb{R}$

α. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{h\to0}\left(e^{\alpha}\dfrac{e^{\alpha h}-1}{h}\right)$

β. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x όταν $x=0$, έχει τιμή 1, τότε να βρείτε τον α

γ. i) Να βρείτε το σημείο της καμπύλης της f, στο οποίο η εφαπτομένη (ε) είναι παράλληλη στην ευθεία (η): $\psi=\alpha e^2x+4$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης αυτής.

ii) Για $\alpha=\dfrac{\sqrt3}{e^2}$, ποια η γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη ευθεία (ε) με τον άξονα x΄x ;

δ. Να υπολογίσετε την τιμή του ορίου $\lim\limits_{x\to3}\left[\dfrac{1}{12e^{3\alpha}}\cdot\dfrac{f(x)x^2-9f(x)}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}\right]$

Λύση

α. $f(x)=e^{\alpha x}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\left(e^{\alpha x}\right)'=\alpha e^{\alpha x}$, άρα $f'(1)=\alpha e^{\alpha}$,(1)

Είναι $\lim\limits_{h\to0}\left(e^{\alpha}\dfrac{e^{\alpha h}-1}{h}\right)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^{\alpha}e^{\alpha h}-e^{\alpha}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^{\alpha h+\alpha}-e^{\alpha}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^{\alpha(1+h)}-e^{\alpha}}{h}$, (2) και $f(1)=e^{\alpha}$, $f(1+h)=e^{\alpha(1+h)}$

Οπότε: $\lim\limits_{h\to0}\left(e^{\alpha}\dfrac{e^{\alpha h}-1}{h}\right)\overset{(2)}{=}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)\overset{(1)}{=}\alpha e^{\alpha}$

β. $f'(x)=\alpha e^{\alpha x}$ και $f'(0)=1$, άρα $\alpha e^{0}=1\Leftrightarrow\alpha=1$

γ. i. Αν $A(x_0,\ f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής της καμπύλης της f με την εφαπτομένη (ε), τότε:

Πρέπει $f'(x_0)=\alpha e^2$ (αφού $\lambda_{(\eta)}=\alpha e^2$ και $\lambda_{(\eta)}=\lambda_{(\varepsilon)}$)

Οπότε, $\alpha e^{\alpha x_0}=\alpha e^2\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}e^{\alpha x_0}=e^2\Leftrightarrow\alpha x_0=2\Leftrightarrow x_0=\dfrac{2}{\alpha}$. Για $x_0=\dfrac{2}{\alpha}$, έχουμε $f\left(\dfrac{2}{\alpha}\right)=e^{\alpha\frac{2}{\alpha}}=e^2$,άρα το σημείο είναι το $A\left(\dfrac{2}{\alpha},\ e^2\right)$.

Στο σημείο $A\left(\dfrac{2}{\alpha},\ e^2\right)$ η εξίσωση εφαπτομένης στην καμπύλη της f είναι:

$$\left.\begin{array}{l}(\varepsilon):\psi=\kappa x+\beta\\ \text{με }\ \kappa=f'\left(\dfrac{2}{\alpha}\right)=\alpha e^2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}(\varepsilon):\psi=\alpha e^2x+\beta\\ \text{όμως }\ A\left(\dfrac{2}{\alpha},\ e^2\right)\in(\varepsilon)\end{array}\right\}\ \text{άρα }\ e^2=\alpha e^2\dfrac{2}{\alpha}+\beta\Leftrightarrow\beta=-e^2$$

Επομένως $(\varepsilon):\psi=\alpha e^2x-e^2$

ii. Έστω φ η γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα x΄x.

Όμως $\lambda_{(\varepsilon)}=\alpha e^2$, που για $\alpha=\dfrac{\sqrt3}{e^2}$, γίνεται: $\lambda_{(\varepsilon)}=\sqrt3$. Τότε εφφ $=\sqrt3$, άρα $\varphi=60^{\circ}$ ή $\dfrac{\pi}{3}$

δ. Για $x>0$, $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{12e^{3\alpha}}\dfrac{e^{\alpha x}x^2-9e^{\alpha x}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\dfrac{1}{12e^{3\alpha}}\lim\limits_{x\to3}\dfrac{e^{\alpha x}(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{1}{12e^{3\alpha}}\lim\limits_{x\to3}\dfrac{e^{\alpha x}(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}{x-3}=$

$=\dfrac{1}{12e^{3\alpha}}\lim\limits_{x\to3}\left[e^{\alpha x}(x+3)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)\right]=\dfrac{1}{12e^{3\alpha}}e^{3\alpha}\cdot6\cdot2\sqrt3=\dfrac{1}{12e^{3\alpha}}12e^{3\alpha}\sqrt3=\sqrt3$

ΛΕΟΝΑΡΝΤ ΟΙΛΕΡ (1707-1783)

Κορυφαίος Ελβετός μαθηματικός με ευρετική ικανότητα και πλούσιο συγγραφικό έργο. Σπούδασε θεολογία και ιατρική στο Πανεπιστήμιο της γενέτειράς του Βασιλείας, αλλά διέπρεψε ως μαθηματικός και γεωμέτρης στην αυλή του τσάρου της Ρωσίας και μέλος της Ακαδημίας Επιστημών της Αγίας Πετρούπολης, η οποία εξέδωσε και τα πρώτα έργα του. Υπήρξε ο εμπνευστής διαφόρων συμβολισμών που χρησιμοποιούνται ακόμα και σήμερα όπως ο συμβολισμός της συνάρτησης f(x), Σ για την άθροιση, e για τη βάση των φυσικών λογαρίθμων, i για τη φανταστική μονάδα - ρίζα του αριθμού 1 - ενώ καθιέρωσε και τον παλιό συμβολισμό π για το λόγο της περιφέρειας προς τη διάμετρό της. Στον τομέα της μαθηματικής ανάλυσης ο Όιλερ συνέγραψε ογκώδεις τόμους, όπου συγκεντρώνει συστηματικά όλο το υλικό περασμένων αιώνων και εισάγει νέα εξαγόμενα (π.χ το δίτομο «Εισαγωγή στην απειροστική ανάλυση»). Σημαντικό έργο άφησε ο Όιλερ και στον τομέα της αριθμοθεωρίας. Σ' αυτόν οφείλεται η πρώτη δημοσιευμένη απόδειξη για το «μικρό θεώρημα του Φερμά», ενώ εντυπωσιακή υπήρξε η θεώρησή του στη συνάρτηση «Ζήτα» και στο συσχετισμό της με τη θεωρία των πρώτων αριθμών. Η «ευθεία του Όιλερ» και ο «κύκλος του Όιλερ» είναι οι κυριότερες σφραγίδες που άφησε ως ο διαπρεπέστερος μαθηματικός που προώθησε στο 18ο αιώνα τη στοιχειώδη γεωμετρία.