ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΤΑΣΟΣ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΥΡΙΑΖΗΣ
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΖΑΧΑΡΟΠΟΥΛΟΣ

- Σχετική συχνότητα της τιμής x_i: $f_i=\frac{\nu_i}{\nu}$
- Μέση τιμή των τιμών x_i: $\bar{x}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}x_i\nu_i$
- Διάμεσος των τιμών $x_1, x_2,\dots, x_\kappa$ (κ:περιττός φυσικός) σε αύξουσα σειρά: $\delta=x_{\frac{\kappa+1}{2}}$

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ-ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ

Θέμα 1°

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται (αν συμπληρωθεί) η κατανομή συχνοτήτων (απολύτων, σχετικών %, σχ. αθροιστικών %) των βαθμών που έλαβαν στο μάθημα της Άλγεβρας ν σε πλήθος μαθητές της Α τάξης ενός Λυκείου.

Βαθμοί Κλάσεις	ν_i	$f_i\%$	$F_i\%$
[..... – 8)	ν_1	10	
[..... – .....)	ν_2		
[..... – .....)	$3\nu_1$		55
[..... – .....)	ν_4		80
[..... – 20]	$2\nu_1$		
Σύνολο	ν		–

α) Να βρείτε:
i) Τα άκρα των κλάσεων.
ii) Τις σχετικές συχνότητες $f_i\%$, $i=2,3,4,5$.
iii) Τις σχετικές αθροιστικές συχνότητες $F_i\%$, $i=1,2,5$.

β) Αν $\nu_2=x_o$ και x_o: θέση ολικού μεγίστου της συνάρτησης $f(x)=-\frac{x^2}{2}+6x,\ x\in\mathbb{R}$, τότε να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα των (απολύτων) συχνοτήτων ν_i.

γ) Για την τιμή ν_2 που υπολογίσατε στο β) ερώτημα να βρείτε:(οι βαθμοί κατανέμονται ομοιόμορφα στις κλάσεις)
i) Το ποσοστό των μαθητών που έλαβαν βαθμό από 12 έως 17.
ii) Το βαθμό πάνω από τον οποίο έλαβε το 55% των μαθητών της τάξης.

Λύση

α) i) Έστω c το πλάτος καθεμιάς από τις πέντε κλάσεις και x το αριστερό άκρο της πρώτης από αυτές. Τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{cases}x+c=8\\x+5c=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+c=8\\4c=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\c=3\end{cases}$$

Έτσι τα άκρα των κλάσεων είναι 5, 8, 11, 14, 17, 20 και οι κλάσεις: [5, 8), [8, 11), [11, 14), [14, 17), [17, 20]

ii) Είναι $\nu_1+\nu_2+3\nu_1+\nu_4+2\nu_1=\nu \Leftrightarrow 6\nu_1+\nu_2+\nu_4=\nu \Leftrightarrow \frac{6\nu_1}{\nu}+\frac{\nu_2}{\nu}+\frac{\nu_4}{\nu}=\frac{\nu}{\nu}$, όμως $f_i=\frac{\nu_i}{\nu}$ και από τον πίνακα $f_1\%=10 \Leftrightarrow f_1=0{,}1$. Άρα $6f_1+f_2+f_4=1 \overset{f_1=0,1}{\Leftrightarrow} f_2+f_4=0{,}4$ (1).

Ακόμη από τον πίνακα: $f_4\%=F_4\%-F_3\% \Leftrightarrow f_4\%=80-55 \Leftrightarrow f_4=0{,}25$ (2).

Οι (1), (2) δίνουν $f_2=0{,}15$.

Οπότε $f_1\%=10$, $f_2\%=15$, $f_3\%=3f_1\%=30$ (με τη βοήθεια της στήλης ν_i του πίνακα), $f_4\%=25$, $f_5\%=2f_1\%=20$ (με τη βοήθεια της στήλης ν_i του πίνακα).

iii) Είναι $F_1\%=10$, $F_2\%=f_1\%+f_2\%=25$, $F_3\%=55$, $F_4\%=80$, $F_5\%=100$.

β) Η $f(x)=-\frac{x^2}{2}+6x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x)=-x+6,\ x\in\mathbb{R}$.

Θέτουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow -x+6=0 \Leftrightarrow x=6$.

Ακόμη $f'(x)>0 \Leftrightarrow -x+6>0 \Leftrightarrow x<6$.

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,6]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[6,+\infty)$,οπότε παρουσιάζει στο $x_o=6$ ολικό μέγιστο το f(6).

Επομένως $\nu_2=6$.

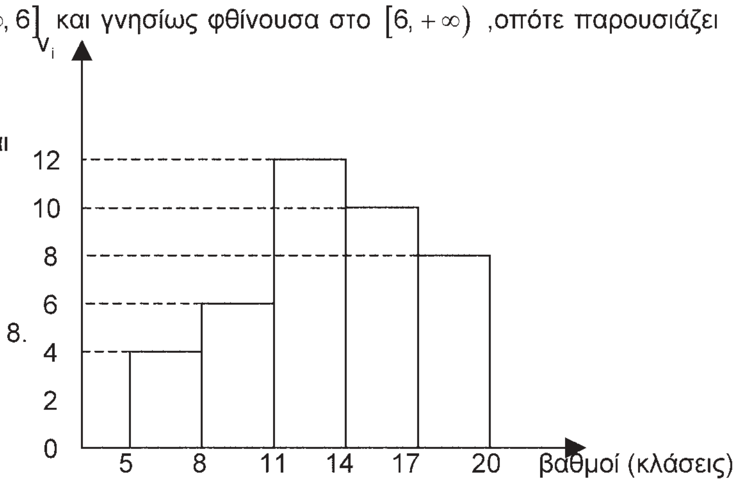
Υπολογίζουμε τις συχνότητες ν_i (καθώς και το πλήθος ν). Είναι:

$f_2=\frac{\nu_2}{\nu} \Leftrightarrow \nu=\frac{\nu_2}{f_2}=\frac{6}{0{,}15}=40$ οπότε

$\nu_1=\nu\cdot f_1=40\cdot0{,}1=4$, $\nu_3=3\nu_1=12$,

$\nu_4=f_4\cdot\nu=0{,}25\cdot40=10$, $\nu_5=2\nu_1=2\cdot4=8$.

Συνεπώς κατασκευάζουμε το διπλανό ιστόγραμμα συχνοτήτων (απολύτων).



γ) i) Αφού οι βαθμοί που έλαβαν οι μαθητές είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι μέσα στις κλάσεις (σε κάθε κλάση) τότε:

Όσοι έλαβαν βαθμό από 12 έως 14 αποτελούν τα $\frac{2}{3}$ του πλήθους της κλάσης $[11, 14)$.

Επομένως το ζητούμενο ποσοστό είναι: $\frac{2}{3}f_3\% + f_4\% = \frac{2}{3}\cdot 30 + 25 = 20 + 25 = 45$, άρα από 12 έως 17 έλαβε το 45% των μαθητών.

ii) Εφ΄ όσον πρόκειται για τον βαθμό πάνω από τον οποίο έλαβε το 55% των μαθητών της τάξης τότε:
55% είναι το άθροισμα (ποσοστών) $f_5\% + f_4\% + f_3'\% = 20 + 25 + 10$,

όπου $f_3'\% = 10 = \frac{1}{3}\cdot 30$ με $30 = f_3\%$,οπότε πάλι λόγω ομοιόμορφης κατανομής των βαθμών το 10% αντιστοιχεί στο $\frac{1}{3}$ της κλάσης $[11, 14)$ δηλαδή στο βαθμό 13 (υπόθεση:πάνω από…).Συνεπώς ο ζητούμενος βαθμός είναι 13.

Θέμα 2°

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (\lambda^2 - 8\lambda + 7)$συνx, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{N}^*$ και $g(x) = (\kappa - 6)$ημx, $x \in \mathbb{R}$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$ με $\kappa < 9$, για τις οποίες $f(0) < 0$ και $g'(0) > 0$.

α) Να βρείτε τις τιμές των λ, κ που προκύπτουν.

β) Οι τιμές των λ, κ του ερωτήματος α) αν τοποθετηθούν σε αύξουσα σειρά αποτελούν τις συχνότητες (απόλυτες) v_i. των τιμών x_i αντιστοίχως, με $x_i = 3i - 2$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ ενός δείγματος v παρατηρήσεων.

Να βρείτε:
i) Το μέγεθος v του δείγματος καθώς και τις τιμές x_i των παρατηρήσεων t_i.
ii) Το ποσοστό των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \ldots, t_v$ που οι τιμές τους είναι μεγαλύτερες του 1 αλλά μικρότερες του 10.
iii) Τη μέση τιμή και τη διάμεσο του δείγματος των παρατηρήσεων t_i

Λύση

α) Είναι $f(0) = \lambda^2 - 8\lambda + 7$ (αφού συν x = 1 για x = 0). Έτσι $f(0) < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 7 < 0 \Leftrightarrow 1 < \lambda < 7$ με $\lambda \in \mathbb{N}^*$,
άρα $\lambda = 2, 3, 4, 5, 6$. Ακόμη η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = (\kappa - 6)$συνx.
Έτσι $g'(0) > 0 \Leftrightarrow \kappa - 6 > 0 \Leftrightarrow \kappa > 6$ με $\kappa \in \mathbb{N}^*$ και $\kappa < 9$, άρα $\kappa = 7, 8$.

β) Οι τιμές των λ, κ τοποθετημένες σε αύξουσα σειρά είναι $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ οπότε:
$v_1 = 2$, $v_2 = 3$, $v_3 = 4$, $v_4 = 5$, $v_5 = 6$, $v_6 = 7$, $v_7 = 8$.
Έτσι οι τιμές x_i των παρατηρήσεων t_i του δείγματος έχουν πλήθος 7, δηλαδή
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7.

i) Μέγεθος δείγματος: $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_7 = 2 + 3 + \ldots + 8 = 35$ παρατηρήσεις.
Από την υπόθεση ισχύει $x_i = 3i - 2$, $i = 1, 2, 3, \ldots$,επομένως υπολογίζουμε τις τιμές
x_i : $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 7$, $x_4 = 10$, $x_5 = 13$, $x_6 = 16$, $x_7 = 19$.

ii) Το ζητούμενο ποσοστό είναι $\frac{v_2 + v_3}{v}\cdot 100\% = \frac{3+4}{35}\cdot 100\% = \frac{100}{5}\% = 20\%$.

iii)
- Η μέση τιμή $\bar{x}$ των $t_1, t_2, \ldots, t_{35}$ δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{7} x_i v_i = \frac{1}{35}(2\cdot 1 + 3\cdot 4 + 4\cdot 7 + 5\cdot 10 + 6\cdot 13 + 7\cdot 16 + 8\cdot 19) =$$

$$= \frac{1}{35}(2 + 12 + 28 + 50 + 78 + 112 + 152) = \frac{434}{35} = 12{,}4.$$

- Η διάμεσος δ των παρατηρήσεων είναι $\delta = t_{18} = 13$ εφόσον αυτή αποτελεί τη μεσαία παρατήρηση του πλήθους των παρατηρήσεων (σε αύξουσα σειρά) που είναι περιττό.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΕΜΜΥ ΝΕΤΕΡ (1882-1935)

Διεθνούς φήμης Γερμανίδα μαθηματικός που διακρίθηκε για τη σημαντικότατη συμβολή της στη δημιουργία «αφηρημένης άλγεβρας» και για τα επιτεύγματά της στη θεωρητική φυσική. Κόρη του επίσης μαθηματικού Μαξ Νέτερ, σπούδασε μαθηματικά στα Πανεπιστήμια της Ερλάνγκεν και Γκέτινγκεν, μόνο ως ακροάτρια, καθώς οι κανόνες της εποχής δεν της επέτρεπαν να είναι κανονική σπουδάστρια. Οι εξαιρετικές της επιδόσεις όμως προκάλεσαν ρήγματα στα απαγορευτικά τείχη. Έτσι, το 1907 διδακτορικό και κατόπιν δίδαξε ως καθηγήτρια σε διάφορα Πανεπιστήμια της Γερμανίας και των ΗΠΑ. Οι βασικές της εργασίες στα μαθηματικά αναφέρονται στη θεωρία των προτύπων («νετεριανό πρότυπο»), στις παραστάσεις αλγεβρών, στους δακτυλίους («δακτύλιος της Νέτερ»), στη θεωρία των ιδεωδών, στη θεωρία των κλάσεων στα αριθμητικά σώματα και, γενικότερα, στην αριθμητική θεωρία των αλγεβρικών συναρτήσεων. Η συνεισφορά της στη θεωρητική φυσική έχει την υπογραφή της στο «θεμελιώδες θεώρημά» της που συνδέει τις ιδιότητες συμμετρίας ενός φυσικού συστήματος με τις «αρχές διατήρησης».