ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΑΓΓΕΛΟΠΟΥΛΟΣ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΝΟΥΛΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΙΧΑΗΛΙΔΗΣ

- Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύουν:
  $\overline{z}^2 = \overline{z^2}$, $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
- Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = \alpha$, $\alpha \in (0, +\infty)$, τότε για $\beta \in (0, +\infty)$, $\beta > \alpha$, ισχύουν:
  $|z-\beta| \le \alpha + \beta$, $|z-\beta| \ge \beta - \alpha$
- Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ, βρίσκεται ‘‘κάτω’’ από τη C_f, με εξαίρεση το σημείο επαφής της.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

Δίνεται ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $|z| = 2$ και η συνάρτηση $f(x) = \left|2z + (i - x)\overline{z}\right|^2$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α. $f(x) = 4x^2 - 4\mathrm{Re}\left[(x+i)z^2\right] + 20$

β. $|\mathrm{Im}(z)| = \sqrt{2}$, όταν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \ge 8\alpha\beta + 20$

γ. Υπάρχει $\xi \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 4(5 - 2\alpha^2)$

δ. Αν $z = z_0$ ο μιγαδικός για τον οποίο $|z| = 2$ και το $|z-3|$ γίνεται ελάχιστο, τότε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = \xi$, είναι $\frac{49}{6}$ τ.μ.

Λύση

α. Είναι $f(x) = \left|2z + (i-x)\overline{z}\right|^2$, $x \in \mathbb{R}$, άρα $f(x) = \left[2z + (i-x)\overline{z}\right] \cdot \left[\overline{2z + (i-x)\overline{z}}\right] \Leftrightarrow$

$f(x) = \left[2z + (i-x)\overline{z}\right] \cdot \left[2\overline{z} + (-i-x)z\right] \Leftrightarrow f(x) = 4z\overline{z} + 2(-i-x)z^2 + 2(i-x)\overline{z}^2 + (x-i)(x+i)z\overline{z} \Leftrightarrow$

$f(x) = 4|z|^2 - 2(x+i)z^2 - 2(x-i)\overline{z}^2 + (x^2+1)|z|^2 \overset{\text{υποθ.}}{\Leftrightarrow} f(x) = 16 - \left[2(x+i)z^2 + 2(x-i)\overline{z^2}\right] + 4(x^2+1) \Leftrightarrow$

$f(x) = 4(x^2+1) - 2\left[(x+i)z^2 + \overline{(x+i)z^2}\right] + 16 \Leftrightarrow f(x) = 4(x^2+1) - 4\mathrm{Re}\left[(x+i)z^2\right] + 16 \Leftrightarrow$

$f(x) = 4x^2 - 4\mathrm{Re}\left[(x+i)z^2\right] + 20$, $x \in \mathbb{R}$

β. Από α. ερώτημα είναι: $f(x) = 4x^2 - 4\mathrm{Re}\left[(x+i)z^2\right] + 20$, $x \in \mathbb{R}$. Έτσι $f(0) = -4\mathrm{Re}(iz^2) + 20$, (1)

Έχουμε $iz^2 = i(\alpha + \beta i)^2 = i(\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i) = -2\alpha\beta + i(\alpha^2 - \beta^2)$, οπότε $\mathrm{Re}(iz^2) = -2\alpha\beta$,

άρα η (1) γράφεται $f(0) = 8\alpha\beta + 20$, (2)

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f(x) \ge 8\alpha\beta + 20 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(x) \ge f(0)$, επομένως η f παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ (ολικό) ελάχιστο.

Ακόμη: $(x+i)z^2 = (x+i)(\alpha + \beta i)^2 = (x+i)(\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i) = x(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta x i + i(\alpha^2 - \beta^2) - 2\alpha\beta =$

$\left[x(\alpha^2 - \beta^2) - 2\alpha\beta\right] + (2\alpha\beta x + \alpha^2 - \beta^2)i$

Συνεπώς $\mathrm{Re}\left[(x+i)z^2\right] = x(\alpha^2 - \beta^2) - 2\alpha\beta$, οπότε $f(x) = 4x^2 - 4x(\alpha^2 - \beta^2) + 8\alpha\beta + 20$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

η οποία (ως πολυωνυμική) είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (άρα και στο $x_0 = 0$),

με $f'(x) = (4x^2)' - \left[4x(\alpha^2 - \beta^2)\right]' + (8\alpha\beta + 20)' \Leftrightarrow f'(x) = 8x - 4(\alpha^2 - \beta^2)$, $x \in \mathbb{R}$, (3)

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, θα ισχύει $f'(0) = 0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} -4(\alpha^2 - \beta^2) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = |\beta|$

Όμως, $|z| = 2$, δηλαδή $\alpha^2 + \beta^2 = 4 \overset{|\alpha|=|\beta|}{\Leftrightarrow} 2\beta^2 = 4 \Leftrightarrow \beta^2 = 2 \Leftrightarrow |\beta| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |\mathrm{Im}(z)| = \sqrt{2}$

γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[0,1] \subset \mathbb{R}$

Συνεπώς, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = f(1) - f(0) \overset{\beta.}{\Leftrightarrow}$

$f'(\xi) = \left[4 - 4(\alpha^2 - \beta^2) + 8\alpha\beta + 20\right] - (8\alpha\beta + 20) = 4 - 4\alpha^2 + 4\beta^2 \overset{\beta^2 = 4 - \alpha^2}{=} 4 - 4\alpha^2 + 16 - 4\alpha^2 = 20 - 8\alpha^2 = 4(5 - 2\alpha^2)$

δ. Είναι $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, οπότε:

$|z| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 4$, (4) και $|z-3|$:ελάχιστο όταν $z = z_0 = 2 + 0i$, αφού τότε

$|z-3| = MA \ge NA = 1 = OA - ON$, όπου: M η εικόνα του $z = \alpha + \beta i$ (M τυχαίο σημείο του κύκλου $(O,2)$ από (4)), N η εικόνα του $z_0 = 2 + 0i$ και A η εικόνα του $3 + 0i$ στο μιγαδικό επίπεδο.

Επομένως $\alpha = 2$ και $\beta = 0$. Άρα η συνάρτηση $f(x) = 4x^2 - 4x(\alpha^2 - \beta^2) + 8\alpha\beta + 20$, $x \in \mathbb{R}$, γίνεται

$f(x) = 4x^2 - 16x + 20$, $x \in \mathbb{R}$. Από ερώτημα γ. έχουμε $f'(\xi) = 4(5 - 2\alpha^2)$, (5) με $f'(x) = 8x - 16$

και $\alpha = 2$, οπότε η (5) γράφεται: $8\xi - 16 = 4(5 - 8) \Leftrightarrow \xi = \frac{1}{2}$. Ισχύει $f(x) > 0$, αφού $\Delta = -64 < 0$,

άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E = 4\int_0^{\frac{1}{2}} (x^2 - 4x + 5)dx = 4\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right]_0^{\frac{1}{2}} = \ldots = \frac{49}{6}$ τ.μ.

Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_{-2}^{3-x}\frac{e^u}{u+3}\,du$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f και να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό.

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε στη C_f στο σημείο καμπής της και να δείξετε ότι για κάθε $x<5$ ισχύει: $e^2f(x)>5-x$

δ. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h με $h(x)=\frac{1}{e^x(3-x)}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=2$, τότε να δείξετε ότι: $E>\frac{1}{e^2}$

Λύση

α. Η συνάρτηση

$\varphi(u)=\frac{e^u}{u+3}$ είναι ορισμένη και συνεχής στο $(-\infty,\ -3)\cup(-3,\ +\infty)$ με $-2\in(-3,\ +\infty)$, άρα $3-x>-3$ $\Leftrightarrow x<6$, οπότε $A=(-\infty,\ 6)$. Η συνάρτηση $g(x)=\int_{-2}^{x}\varphi(u)\,du$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-3,\ +\infty)$ ως αρχική της φ σ' αυτό με $g'(x)=\varphi(x)$, επομένως η f ως σύνθεση της $3-x$ (παραγωγίσιμη) με τη g, είναι παραγωγίσιμη στο $A=(-\infty,\ 6)$. Έχουμε λοιπόν $f(x)=g(3-x)$, άρα $f'(x)=g'(3-x)\cdot(3-x)'=-\varphi(3-x)=$ $-\frac{e^{3-x}}{3-x+3}=\frac{e^{3-x}}{x-6}$, $x<6$. Συνεπώς $f'(x)<0$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ 6)$

β. Για $x<6$, ισχύει:

$f'(x)=\frac{e^{3-x}}{x-6}$, οπότε (f' παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων) $(f'(x))'=\left(\frac{e^{3-x}}{x-6}\right)'\Leftrightarrow$

$$f''(x)=\frac{-e^{3-x}(x-6)-e^{3-x}}{(x-6)^2}=-\frac{e^{3-x}}{(x-6)^2}(x-5)$$

Έτσι: $f''(x)=0\Leftrightarrow x=5$ και $f''(x)>0\Leftrightarrow -\frac{e^{3-x}}{(x-6)^2}(x-5)>0\Leftrightarrow x-5<0\Leftrightarrow x<5$

Συνεπώς η f (συνεχής στο Α) είναι κυρτή στο $(-\infty,\ 5]$ και κοίλη στο $[5,\ 6)$, παρουσιάζει επομένως καμπή στο $x_0=5$, το $f(5)=\int_{-2}^{-2}\frac{e^u}{u+3}\,du=0$, (1)

γ. Από α. ερώτημα έχουμε $f'(x)=\frac{e^{3-x}}{x-6}$, άρα $f'(5)=-\frac{1}{e^2}$, (2). Η εξίσωση της εφαπτομένης ε στη C_f στο σημείο καμπής της είναι: $y-f(5)=f'(5)(x-5)\overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow}y=-\frac{1}{e^2}(x-5)$. Επειδή η f είναι κυρτή στο $(-\infty,\ 5]$, η C_f θα βρίσκεται "πάνω" από την ε για κάθε $x\le 5$, άρα θα ισχύει $f(x)>y$ (η ισότητα $f(x)=y$, ισχύει μόνο στο σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένης της ε και το οποίο έχει τετμημένη $x_0=5$).

Συνεπώς $f(x)>y\Leftrightarrow f(x)>-\frac{1}{e^2}(x-5)\Leftrightarrow e^2f(x)>5-x$, (3), για κάθε $x<5$

δ. Από (3): $f(x)>-\frac{1}{e^2}(x-5)$, άρα $\int_{-2}^{3-x}\frac{e^u}{u+3}\,du>\frac{5-x}{e^2}$, (4). Για το $\int_{-2}^{3-x}\frac{e^u}{u+3}\,du$, θέτουμε $u=-t$, οπότε $du=-dt$ και αν $u=3-x$ έχουμε $t=x-3$, ενώ αν $u=-2$ έχουμε $t=2$

Έτσι $\int_{-2}^{3-x}\frac{e^u}{u+3}\,du=-\int_{2}^{x-3}\frac{e^{-t}}{3-t}\,dt=\int_{2}^{x-3}\frac{e^{-t}}{t-3}\,dt=\int_{2}^{x-3}\frac{1}{e^t(t-3)}\,dt$

Επομένως η (4) γράφεται: $\int_{2}^{x-3}\frac{1}{e^t(t-3)}\,dt>\frac{5-x}{e^2}$

Αν στην τελευταία θέσουμε $x=4$, τότε: $\int_{2}^{1}\frac{1}{e^t(t-3)}\,dt>\frac{1}{e^2}\Leftrightarrow-\int_{1}^{2}\frac{1}{e^t(t-3)}\,dt>\frac{1}{e^2}\Leftrightarrow$

$-\int_{1}^{2}\frac{1}{e^x(x-3)}\,dx>\frac{1}{e^2}$, (5). Η συνάρτηση $h(x)=\frac{1}{e^x(x-3)}$ είναι συνεχής στο $[1,\ 2]$ και ισχύει $h(x)<0$

Επομένως για το εμβαδόν έχουμε $E=\int_{1}^{2}-\frac{1}{e^x(x-3)}\,dx=-\int_{1}^{2}\frac{1}{e^x(x-3)}\,dx$, άρα από (5): $E>\frac{1}{e^2}$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΖΟΖΕΦ ΛΙΟΥΒΙΛ (1809-1882)

Γάλλος μαθηματικός, από τους διαπρεπέστερους και γονιμότερους ερευνητές του 19ου αιώνα. Εργάστηκε κυρίως στην αριθμοθεωρία, στην ανάλυση, στη διαφορική γεωμετρία και στις διαφορικές εξισώσεις. Το 1833 κατέλαβε καθηγητική έδρα στην Ecole Polytechnique και δίδαξε επίσης στο Κολλέγιο της Γαλλίας και στη Σχολή Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου του Παρισιού. Το 1836 ίδρυσε το «Περιοδικό καθαρών και εφαρμοσμένων μαθηματικών» που υπήρξε χρησιμότατο για τους Γάλλους μαθηματικούς, καθώς μέσα από αυτό γίνονταν γνωστές οι εργασίες τους. Από τα σημαντικότερα επιτεύγματά του είναι ότι πρώτος αυτός απέδειξε την ύπαρξη υπερβατικών αριθμών και προσδιόρισε μια ικανή συνθήκη για να είναι ένας αριθμός υπερβατικός. Γνωστά είναι επίσης η «ταυτότητα του Λιουβίλ», η «πολλαπλασιαστική αριθμητική συνάρτηση λ του Λιουβίλ» και πολλά άλλα εξαγόμενά του. Ασχολήθηκε ακόμα με τις διαφορικές εξισώσεις και τα συνοριακά προβλήματα που συναρτώνται με αυτές. Οι μέθοδοι που εφάρμοζε για την αντιμετώπισή τους είχαν τέτοια δυναμικότητα ώστε να εφαρμόζονται και στον 20ο αι. Τέλος, η μεγάλη παραγωγικότητά του υπήρξε χρήσιμη και στη στατική μηχανική, ένα από τα θεωρήματα της οποίας φέρει το όνομά του. Στο συγγραφικό του έργο περιλαμβάνονται 400 περίπου δημοσιεύματα, και από αυτά, τα περισσότερα αναφέρονται στην αριθμοθεωρία.