ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΣΟΦΙΑ ΣΟΚΟΛΑΚΗ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΥΡΙΑΖΗΣ

«

εφω=$f'(x_0)$ ε R
όπου ω: γωνία μεταξύ του x΄x και της εφαπτομένης στην καμπύλη της f στο $M(x_0, f(x_0))$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θέμα 1°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+3x}-\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο A(1, 0).

A. Να βρείτε:
- i. Το πεδίο ορισμού A_f της f.
- ii. Την τιμή του πραγματικού α.
- iii. Την εφαπτομένη (ε) στην καμπύλη της f, που είναι παράλληλη στην ευθεία (δ): $\psi=\frac{5}{4}x+1$.

B. Αν $g(x)=x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$ να βρείτε:
- i. Το πεδίο ορισμού $A_{\frac{f}{g}}$ της συνάρτησης $\frac{f}{g}$.
- ii. Την τιμή του πραγματικού κ ώστε η συνάρτηση

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{g(x)}, & x\in(-\infty,-3]\cup[0,1)\cup(1,+\infty)\\ \kappa\ , & x=1\end{cases}$$

να είναι συνεχής στο σημείο με τετμημένη $x_o=1$.

Λύση

A. i. $f(x)=\sqrt{x^2+3x}-\alpha$. Η f ορίζεται όταν $x^2+3x\ge 0$ επομένως $x\le -3$ ή $x\ge 0$.
Άρα $A_f=(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)$.

ii. Αφού το A(1, 0) είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f, θα ισχύει: f(1) = 0, δηλαδή $\sqrt{4}-\alpha=0$ οπότε $\alpha=2$.

iii. Έστω $M(x_o, f(x_o))$ το σημείο επαφής της γραφικής παράστασης της f με την ζητούμενη ευθεία (ε).

Αφού (ε) || (δ) θα ισχύει $\lambda_\varepsilon=\lambda_\delta$ δηλαδή $f'(x_o)=\frac{5}{4}$.

Αλλά $f'(x)=\dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}},\ x\in(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$ οπότε $\dfrac{2x_o+3}{2\sqrt{x_o^2+3x_o}}=\dfrac{5}{4}$ δηλαδή

$8x_o+12=10\sqrt{x_o^2+3x_o}$ (1) $\left(\text{με } 8x_o+12\ge 0\Leftrightarrow x_o\ge-\frac{3}{2},\ \text{αλλά } x_o\in(-\infty,-3)\cup(0,+\infty),\ \text{άρα } x_o>0\right)$.

Υψώνοντας την (1) στο τετράγωνο παίρνουμε τη σχέση:
$64x_o^2+192x_o+144=100x_o^2+300x_o \Leftrightarrow 36x_o^2+108x_o-144=0\Leftrightarrow x_o^2+3x_o-4=0$ άρα $x_o=1$ ή $x_o=-4$.
Η τιμή -4 απορρίπτεται αφού $x_o>0$. Επομένως $x_o=1$, δηλαδή το σημείο επαφής είναι το M(1, 0) που είναι το σημείο A της υπόθεσης.

Η ζητούμενη ευθεία (ε) έχει εξίσωση $\psi=\frac{5}{4}x+\kappa$ με A ∈ (ε), άρα $0=\frac{5}{4}+\kappa\Leftrightarrow\kappa=-\frac{5}{4}$. Επομένως (ε): $\psi=\frac{5}{4}x-\frac{5}{4}$.

B. i. Έχουμε $A_f=(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)$ και $A_g=\mathbb{R}$.
Από τα κοινά στοιχεία των A_f και A_g, θα πρέπει να εξαιρεθούν οι τιμές που μηδενίζουν την g, δηλαδή $x^2-1\ne 0$ άρα $x\ne\pm 1$. Έτσι το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι: $A_{\frac{f}{g}}=(-\infty,-3]\cup[0,1)\cup(1,+\infty)$.

ii. Αφού η συνάρτηση h είναι συνεχής στο x_o = 1, θα ισχύει $\lim\limits_{x\to1}h(x)=h(1)=\kappa$ (2).
Αλλά:

$$\lim_{x\to1}h(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)}{(x^2-1)\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}\right)^2-2^2}{(x^2-1)\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)}=\frac{5}{8}\quad(3).$$

Από τις σχέσεις (2 και 3) έχουμε $\kappa=\frac{5}{8}$.

Θέμα 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{2007}, \quad x\in\mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^{2007}-1}{h}$.

β. Πότε ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x είναι θετικός;

γ. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στην ευθεία (ε): $y = 2007x + 2011$ και στη συνέχεια να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων αυτών.

δ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)\cdot(x^2-2x+1)}{\sqrt{x}-1}$.

Λύση

α. $f(x)=x^{2007}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2007\cdot x^{2006}$.

Είναι $f(1+h)=(1+h)^{2007}$ και $f(1) = 1$.

Οπότε: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^{2007}-1}{h}=f'(1)=2007\cdot 1^{2006}=2007$.

β. $f'(x)>0 \Leftrightarrow 2007\cdot x^{2006}>0 \Leftrightarrow x^{2006}>0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

γ. Πρέπει $f'(x)=2007$ αφού ($\lambda_\varepsilon = 2007$).

Οπότε $2007\cdot x^{2006}=2007 \Leftrightarrow x^{2006}=1 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$.

Για $x = 1$: $f(1) = 1^{2007}=1$.

Για $x=-1$: $f(-1)=(-1)^{2007}=-1$.

Άρα τα σημεία είναι τα $A(1, 1)$ και $B(-1, -1)$.

Στο $A(1, 1)$ η εξίσωση εφαπτομένης είναι:

$$\left.\begin{array}{l}(\varepsilon_1): y=\alpha_1 x+\beta_1\\ \text{με } \alpha_1=f'(1)=2007\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}(\varepsilon_1): y=2007x+\beta_1\\ \text{όμως } A(1,1)\in(\varepsilon_1)\end{array}\right\} \text{ άρα } 1=2007\cdot 1+\beta_1 \Leftrightarrow \beta_1=-2006.$$

Επομένως $(\varepsilon_1): y=2007x-2006$.

Στο $B(-1, -1)$ η εξίσωση εφαπτομένης είναι:

$$\left.\begin{array}{l}(\varepsilon_2): y=\alpha_2 x+\beta_2\\ \text{με } \alpha_2=f'(-1)=2007\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}(\varepsilon_1): y=2007x+\beta_2\\ \text{όμως } B(-1,-1)\in(\varepsilon_2)\end{array}\right\} \text{ άρα } -1=2007\cdot(-1)+\beta_2 \Leftrightarrow \beta_2=2006.$$

Επομένως $(\varepsilon_2): y=2007x+2006$.

δ. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2007}\cdot(x^2-2x+1)}{\sqrt{x}-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x^{2007}\cdot(x-1)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{2007}\cdot(x-1)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left[x^{2007}\cdot(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)\right]=$$

$= 1\cdot 0\cdot 2 = 0$.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΖΙΛ ΑΝΡΙ ΠΟΥΑΝΚΑΡΕ (1854-1912)

Γάλλος μαθηματικός από το Νανσί, που μεγαλούργησε σαν καθηγητής-ερευνητής του Πανεπιστημίου του Παρισιού. Το έργο του στα Μαθηματικά σήμανε το τέλος της κλασικής εποχής στη συγκεκριμένη επιστήμη και άνοιξε το δρόμο στην ανάπτυξη των σύγχρονων μαθηματικών, στα οποία επιτυγχάνονται πια όχι μόνο ποσοτικά αλλά και ποιοτικά αποτελέσματα. Ο Πουανκαρέ ασχολήθηκε κυρίως με τις διαφορικές εξισώσεις και τις υπερβατικές συναρτήσεις. Το 1880 εξέδοσε μια σειρά άρθρων με τίτλο «Περί καμπυλών προσδιοριζομένων υπό διαφορικών εξισώσεων». Αργότερα οδηγήθηκε στη μελέτη νέων κλάσεων υπερβατικών συναρτήσεων, οι οποίες ονομάζονται αυτομορφικές συναρτήσεις. Απέδειξε με αυτές ένα θεώρημα πρόσθεσης, με βάση το οποίο οι αλγεβρικές καμπύλες μπορούσαν να ομοιομορφοποιηθούν. Έτσι έγινε βασικός θεμελιωτής νόμων της τοπολογίας, αφού οι τύποι της μελετητικής του ομάδας όρισαν τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών των πλευρών, των κορυφών και των εδρών ενός πολυδιάστατου πολυτόπου. Σημαντική υπήρξε η συμβολή του Πουανκαρέ και στη μαθηματική φυσική με τις έρευνες για τις ταλαντώσεις τρισδιάστατων συνεχών μέσων.