ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΤΑΣΟΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΥΡΙΑΖΗΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΜΑΡΙΝΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΥΡΙΑΚΟΥΛΗΣ

«

Έστω συνάρτηση f συνεχής και μη μηδενική σε διάστημα $\Delta \subset \mathbb{R}$. Αν για $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = 0$, τότε $x_1 = x_2$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+|z|^2x+(z\bar{z})^2}-(x+\mathrm{Im}(z))$, $x\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{C}$.

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ τον άξονα x΄x, τότε:

i) Να δείξετε ότι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημείο κύκλου κέντρου Κ(0, 1) και ακτίνας ρ = 1, με εξαίρεση το σημείο Ο(0,0).

ii) Να βρείτε το μιγαδικό z που έχει το μέγιστο μέτρο και να δείξετε ότι $4\le|z+3+3i|\le 6$.

iii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

iv) Για z = 2i να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g(x) = (x + 2)f(x), τους άξονες x΄x, y΄y και την ευθεία x = 4.

Λύση

i) Για το τριώνυμο $x^2+|z|^2x+(z\bar{z})^2$ έχουμε: $\Delta=|z|^4-4(z\bar{z})^2=-3|z|^4\le 0$, άρα η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

- Αν $\Delta<0$ τότε $x^2+|z|^2x+(z\bar{z})^2>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\frac{2x+|z|^2}{2\sqrt{x^2+|z|^2x+(z\bar{z})^2}}-1.$$

- Αν $\Delta=0$ τότε $z=0$ και $f(x)=|x|-x$, δηλαδή $f(x)=\begin{cases}0\,, & x\ge 0\\ -2x, & x<0\end{cases}$ που δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0,

αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-2x}{x}=-2$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$. Επομένως $z\ne 0$.

Αφού η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον x΄x για $x\to+\infty$, θα ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ (1).

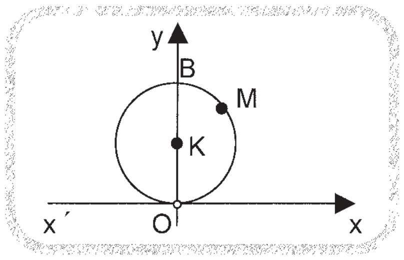
Αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+|z|^2x+(z\bar{z})^2}-x-\mathrm{Im}(z)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+|z|^2x+(z\bar{z})^2-x^2}{\sqrt{x^2+|z|^2x+(z\bar{z})^2}+x}-\mathrm{Im}(z)\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\left(|z|^2+\frac{(z\bar{z})^2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{|z|^2}{x}+\frac{(z\bar{z})^2}{x^2}}+1\right)}-\mathrm{Im}(z)\right)=\frac{|z|^2}{2}-\mathrm{Im}(z),\ \text{αφού}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{|z|^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(z\bar{z})^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(z\bar{z})^2}{x^2}=0.$$

Άρα λόγω της (1) είναι: $|z|^2-2\mathrm{Im}(z)=0$ (2).

Αν z=α+βi (α,β$\in\mathbb{R}$), τότε από (2): $\alpha^2+\beta^2-2\beta=0\Leftrightarrow\alpha^2+(\beta-1)^2=1$, συνεπώς η εικόνα Μ(α,β) του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημείο κύκλου κέντρου Κ(0, 1) και ακτίνας ρ = 1, με εξαίρεση το Ο(0, 0) αφού $z\ne 0$.

ii) Το $|z|$ είναι η απόσταση της εικόνας Μ του μιγαδικού z από την αρχή των αξόνων Ο(0,0). Ισχύει: (ΟΜ) ≤ (ΟΒ) για κάθε σημείο Μ του κύκλου εκτός του Ο (με Β(0, 2)), άρα: $\max|z|=2$ και τότε z = 2i.



Από το (i) είναι $|z-i|=1$ και z + 3 + 3i = z – i + 3 + 4i, οπότε:

$$\big||z-i|-|3+4i|\big|\le|z+3+3i|\le|z-i|+|3+4i|\ \Leftrightarrow\ |1-5|\le|z+3+3i|\le 1+5\ \Leftrightarrow\ 4\le|z+3+3i|\le 6.$$

iii) Έχουμε $f'(x)=\dfrac{x+\frac{|z|^2}{2}}{\sqrt{x^2+|z|^2x+(z\bar{z})^2}}-1=\dfrac{x+\frac{|z|^2}{2}-\sqrt{x^2+|z|^2x+(z\bar{z})^2}}{\sqrt{x^2+|z|^2x+(z\bar{z})^2}}$, επομένως αρκεί να δείξουμε ότι:

$x+\frac{|z|^2}{2}<\sqrt{x^2+|z|^2x+(z\bar{z})^2}$ (3), (αφού $\sqrt{x^2+|z|^2x+(z\bar{z})^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$).

- Αν $x+\frac{|z|^2}{2}<0$ τότε η (3) ισχύει.
- Αν $x+\frac{|z|^2}{2}\ge 0$ η (3) ισοδύναμα γίνεται: $x^2+|z|^2x+\frac{|z|^4}{4}<x^2+|z|^2x+|z|^4\ \Leftrightarrow\ 3|z|^4>0$, που ισχύει αφού $z\ne 0$.

Άρα $f'(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

iv) Το ζητούμενο εμβαδόν Ε δίνεται από τον τύπο $E=\int_0^4|(x+2)f(x)|dx$. Είναι z = 2i, άρα $|z|=2$ και $\mathrm{Im}(z)=2$, επομένως $f(x)=\sqrt{x^2+4x+16}-x-2, x\in\mathbb{R}$. Έτσι για $x\in[0,4]$ έχουμε x + 2 > 0 και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ f(x) > 0 αφού $\sqrt{x^2+4x+16} > x+2 \Leftrightarrow 16 > 4$ που ισχύει. Οπότε $E = \int_0^4 (x+2)f(x)dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E = \int_0^4 (x+2)\left(\sqrt{x^2+4x+16}-x-2\right)dx = \int_0^4 (x+2)\sqrt{x^2+4x+16}dx - \int_0^4 (x+2)^2 dx = I_1 - I_2.$

Για το I_1 θέτουμε $x^2+4x+16=u$ άρα $du=(2x+4)dx \Leftrightarrow \frac{du}{2}=(x+2)dx$ και για $x=0$ έχουμε $u=16$,

ενώ για $x=4$ έχουμε $u=48$, οπότε: $I_1 = \int_{16}^{48}\sqrt{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_{16}^{48} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{48}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\sqrt{16}\right)^3 = 64\sqrt{3} - \frac{64}{3}$ τ.μ.

Το $I_2 = \frac{1}{3}\left[(x+2)^3\right]_0^4 = \frac{1}{3}\cdot 6^3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}\cdot 36\cdot 6 - \frac{8}{3} = 72 - \frac{8}{3}$ τ.μ. Τελικά $E = 64\sqrt{3} - \frac{272}{3}$ τ.μ.

Θέμα 2ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ με $f(2)=4f(0)$ για την οποία ισχύει:

$f'(x)+4=6f(x)-5f^2(x)$, για κάθε $x\in[0,2]$.

Α. Να δείξετε ότι:

α) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$ και $f(0)<0$.

β) i) $f'(x)+\ell n2 f^2(x)<0$ και ii) $-2<\int_0^2 f(x)dx<0$.

Β. Έστω z μιγαδικός αριθμός για τον οποίο οι αριθμοί $|z|^3-8$ και $-12|z|+6|z|^2$ ανήκουν στο $[0, 2]$.

Αν ισχύει $\int_{|z|^3-8}^{-12|z|+6|z|^2} f(x)dx=0$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

Λύση

Α. α) Έχουμε $f'(x)+4=6f(x)-5f^2(x) \Leftrightarrow f'(x)=-5f^2(x)+6f(x)-4$ που είναι τριώνυμο ως προς $f(x)$ με $\Delta=-44<0$. Άρα για κάθε $x\in[0,2]$ θα ισχύει $-5f^2(x)+6f(x)-4<0 \Leftrightarrow f'(x)<0$ (1) και επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$, συνεπώς ισχύουν γι' αυτήν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[0, 2]$. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,2)$ ώστε:

$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(0)}{2} \overset{\text{υποθ.}}{=} \frac{4f(0)-f(0)}{2}=\frac{3f(0)}{2}$,οπότε $f(0)=\frac{2f'(\xi)}{3}$.Έτσι $f(0)<0$ αφού $f'(\xi)<0$ (από(1)).

β) i) $f'(x)+\ell n2f^2(x)<0 \Leftrightarrow -5f^2(x)+6f(x)-4+\ell n2f^2(x)<0 \Leftrightarrow (-5+\ell n2)f^2(x)+6f(x)-4<0$ (2).

Για το τριώνυμο(ως προς $f(x)$) : $(-5+\ell n2)f^2(x)+6f(x)-4$ έχουμε $\Delta=-44+16\ell n2$.Όμως $2<e$ $\Leftrightarrow -44+16\ell n2<-44+16$ οπότε $\Delta<-28<0$.Είναι $-5+\ell n2<0$,άρα η (2) ισχύει για κάθε $x\in[0,2]$.

ii) Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και γνησίως φθίνουσα σε αυτό με $f(0)<0$,οπότε $f(x)<0 \Leftrightarrow -f(x)>0$.

Επομένως $\int_0^2 -f(x)dx>0 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx<0$, για κάθε $x\in[0,2]$.

Επιπλέον λόγω του β i) ισχύει: $f'(x)+\ell n2f^2(x)<0$, για κάθε $x\in[0,2]$, επομένως διαιρώντας με $f(x)<0$ παίρνουμε: $\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{\ell n2f^2(x)}{f(x)}>0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}+\ell n2f(x)>0$ (3). Η $f'(x)$ είναι συνεχής, αφού η $g(x)=-5f^2(x)+6f(x)-4$ είναι συνεχής στο $[0, 2]$ ως σύνθεση των συνεχών $f(x), -5x^2+6x-4$.

Άρα από την (3) έχουμε:

$$\int_0^2\left(\frac{f'(x)}{f(x)}+\ell n2f(x)\right)dx>0 \Leftrightarrow \int_0^2\frac{f'(x)}{f(x)}dx>-\int_0^2\ell n2f(x)dx \Leftrightarrow \left[\ell n|f(x)|\right]_0^2>-\ell n2\int_0^2 f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ell n|f(2)|-\ell n|f(0)|>-\ell n2\int_0^2 f(x)dx \Leftrightarrow \ell n\left|\frac{4f(0)}{f(0)}\right|>-\ell n2\int_0^2 f(x)dx \Leftrightarrow \ell n4>-\ell n2\int_0^2 f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\ell n2>-\ell n2\int_0^2 f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx>-\frac{2\ell n2}{\ell n2} \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx>-2.$$ Τελικά $-2<\int_0^2 f(x)dx<0$.

Β. Είναι $f(x)<0$, για κάθε $x\in[0,2]$, συνεπώς $\int_{|z|^3-8}^{-12|z|+6|z|^2} f(x)dx\neq 0$ για $-12|z|+6|z|^2\neq|z|^3-8$.

Επομένως $-12|z|+6|z|^2=|z|^3-8 \Leftrightarrow |z|^3-6|z|^2+12|z|-8=0 \Leftrightarrow (|z|-2)^3=0 \Leftrightarrow |z|=2$.

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho=2$.

ΜΠΕΡΝΑΡΝΤ ΡΙΜΑΝ (1826-1866)

Κορυφαίος Γερμανός μαθηματικός, που έμεινε στην ιστορία για τις πρωτότυπες ιδιοφυείς ιδέες με τις οποίες άνοιξε εντελώς νέους δρόμους τόσο στα μαθηματικά όσο και στη φυσική. Σπούδασε στο Βερολίνο κοντά στους Γιακόμπι, Ντίριχλετ, Στάινερ και κατόπιν στο Πανεπιστήμιο Γκέτινγκεν, όπου δίδασκε ο διάσημος Γκάους. Εκεί έδωσε το πρώτο δείγμα της διάνοιας του. Παρουσίασε διδακτορική εργασία με θέμα τη «Θεμελίωση μιας γενικής θεωρίας συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής». Επρόκειτο για αριστουργηματική συνεισφορά στα σύγχρονα τότε μαθηματικά, που προκάλεσε το θαυμασμό ακόμα και του αυστηρού Γκάους! Η μελέτη του αυτή οδήγησε στη σύλληψη της εφαρμοζομένης και σήμερα έννοιας της «επιφάνειας Ρίμαν» και της έννοιας των «πολύφυλλων» επιφανειών. Κάθε τέτοια επιφάνεια αποτελεί το πεδίο τιμών μιας αρχικά πλειονότιμης συνάρτησης μιας μιγαδικής μεταβλητής και κατασκευάζεται τεχνητά από κατάλληλα αρθρωμένα επίπεδα, το καθένα από τα οποία αντιστοιχεί σε έναν και μόνο κλάδο της συνάρτησης. Οι εργασίες του Ρίμαν δεν άργησαν να χτίσουν τα θεμέλια μιας σύγχρονης (τότε) γεωμετρίας, που πήγε μπροστά τις μέχρι τότε γνωστές ευκλείδειες θεωρήσεις.