**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

# ΦΥΣΙΚΗ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΔΙΟΝΥΣΗΣ ΣΥΝΟΔΙΝΟΣ
ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ ΡΕΜΠΕΛΑΚΗΣ
ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΜΠΑΡΤΖΗΣ
ΜΑΡΙΝΑ ΧΑΤΖΗΜΙΧΑΗΛ

*Όταν ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική και στροφική κίνηση η συνολική του κινητική ενέργεια είναι ίση με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών καθεμίας κίνησης.*



## ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΙ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

### ΘΕΜΑ 1°

Μια ομογενής σφαίρα μάζας M = 1 Kg και ακτίνας R = 0,1 m, τη χρονική στιγμή t = 0s τοποθετείται με μηδενική ταχύτητα πάνω σε οριζόντια ταινία μεταφοράς αποσκευών που κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου υ = 7m/s. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης σφαίρας – ταινίας είναι μ = 0,1. Αν η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο της είναι $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10m/s^2$, να βρείτε:

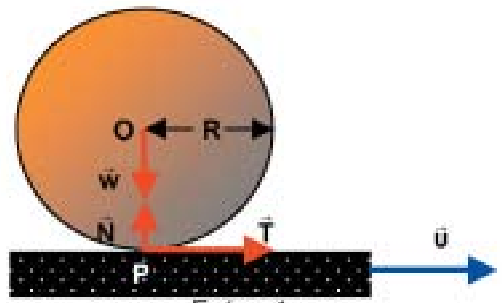
α) τη γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας αμέσως μετά την επαφή της με την κινούμενη ταινία.
β) τη γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας σε συνάρτηση με το χρόνο.
γ) τη χρονική στιγμή στην οποία η τριβή ολίσθησης μηδενίζεται.
δ) Να παραστήσετε γραφικά τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής της σφαίρας σε συνάρτηση με το χρόνο.

Θεωρήστε πως κατά τη διάρκεια του φαινομένου η ταχύτητα της ταινίας μεταφοράς παραμένει σταθερή.

### ΛΥΣΗ

α) Επειδή η ταινία κινείται και η σφαίρα αρχικά ακινητεί, οι δύο επιφάνειες θα αλληλεπιδράσουν με δυνάμεις τριβής ολίσθησης. Η σφαίρα θα ασκήσει στην ταινία δύναμη τριβής ολίσθησης με φορά αντίθετη της ταχύτητας της ταινίας. Συνεπώς και η ταινία θα ασκεί δύναμη τριβής ολίσθησης $\vec{T}$ στη σφαίρα.
έτσι, στη σφαίρα ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος $\vec{w}$ με $w = M \cdot g$
- η κάθετη αντίδραση του δαπέδου $\vec{N}$ και
- η δύναμη της τριβής ολίσθησης $\vec{T}$ με $T = \mu \cdot N$, όπου μ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σφαίρας και ταινίας.



Σχήμα 1

Για τη μεταφορική κίνηση της σφαίρας ισχύει:

$\Sigma F_y = 0$ ή $N - w = 0$ ή $N = w$ ή $N = Mg$ (1)

Όμως $T = \mu \cdot N$ ή λόγω της σχέσης (1) $T = \mu \cdot M \cdot g$ (2)

Ακόμα ισχύει $\Sigma F_x = M \cdot \alpha_{cm}$ ή $T = M \cdot \alpha_{cm}$ (3), όπου $\alpha_{cm}$ η επιτάχυνση του κέντρου μάζας της σφαίρας.

Από τις σχέσεις (2) και (3) παίρνουμε: $M \cdot \alpha_{cm} = \mu \cdot M \cdot g$ ή $\alpha_{cm} = \mu \cdot g$ (4)
Η συνιστάμενη ροπή ως προς άξονα διερχόμενο από το κέντρο της σφαίρας είναι:
$\tau_{(O)} = T \cdot R$ ή λόγω της σχέσης (2) $\tau_{(O)} = \mu \cdot M \cdot g \cdot R$ (5)

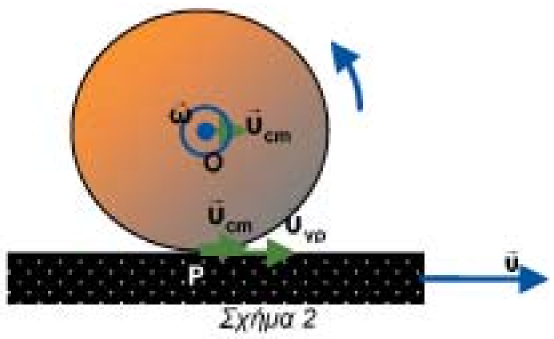
Εφαρμόζοντας το νόμο της στροφικής κίνησης για τη σφαίρα παίρνουμε: $\tau_{(O)} = I_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $\tau_{(O)} = \frac{2}{5} M \cdot R^2 \alpha_{\gamma\omega\nu}$ (6),
όπου $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ η γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας.

Από τις σχέσεις (5) και (6) προκύπτει: $\mu \cdot M \cdot g \cdot R = \frac{2}{5} M \cdot R^2 \alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{5\mu g}{2R}$ (7) ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 25rad/s^2$.

β) Επειδή η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή και για t = 0s η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας ήταν μηδέν για τη στροφική της κίνηση ισχύει: $\omega(t) = \alpha_{\gamma\omega\nu} t$ ή $\omega(t) = \frac{5\mu g}{2R} t$ ή (8) $\omega(t) = 25 \cdot t$ (S.I.)

γ) Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από τη σχέση:
$\upsilon_{cm}(t) = \alpha_{cm} \cdot t$ ή λόγω της σχέσης (4) $\upsilon_{cm}(t) = \mu \cdot g \cdot t$ (9)

Το μέτρο της συνολικής ταχύτητας του σημείου επαφής P της σφαίρας με τη ταινία θα είναι:
$\upsilon_P = \omega(t) \cdot R + \upsilon_{cm}(t)$
Μέσω των σχέσεων (8) και (9) η παραπάνω σχέση γίνεται: $\upsilon_P = \frac{5\mu g}{2R} t \cdot R + \mu \cdot g \cdot t$ ή $\upsilon_P = \frac{7}{2} \mu g t$.



Σχήμα 2

Η χρονική στιγμή $t_1$ κατά την οποία το σημείο P θα είναι ακίνητο ως προς την ταινία (δηλαδή όταν θα έχει την ίδια ταχύτητα με την ταινία) βρίσκεται εξισώνοντας την τελευταία σχέση με την ταχύτητα της ταινίας. Δηλαδή,

$\upsilon = \upsilon_P$ ή $\upsilon = \frac{7}{2} \mu g t_1$ ή $t_1 = \frac{2\upsilon}{7\mu g}$ ή $t_1 = 2s$.

Μετά τη χρονική στιγμή $t_1$ η σφαίρα παύει να ολισθαίνει και η τριβή ολίσθησης μηδενίζεται. Για χρόνο $t \geq t_1 = 2s$ η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή και ίση με $\omega(t \geq 2s) = \omega(t_1) = \frac{5\mu g}{2R} t_1$ ή $\omega(t \geq 2s) = \frac{5\mu g}{2R} \frac{2\upsilon}{7\mu g}$ ή

$\omega(t \geq 2s) = \frac{5\upsilon}{7R}$ ή $\omega(t \geq 2s) = 50rad/s$.

**ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ**

Τελικά, η σχέση της μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας σε συνάρτηση με το χρόνο t (στο S.I.) είναι η:

$$\omega(t) = \begin{cases} 25\cdot t, & 0 \le t \le 2s \\ 50, & t > 2s \end{cases}$$

δ) Η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής της σφαίρας για χρόνο $0 \le t \le 2s$ δίνεται από τη σχέση :

$$K = \frac{1}{2} I\cdot[\omega(t)]^2 \text{ ή } K = \frac{1}{2}\frac{2}{5}M\cdot R^2\left(\frac{5\mu g}{2R}t\right)^2 \text{ ή } K = \frac{5M\mu^2 g^2}{4}t^2 \text{ ή } K = 1{,}25t^2 \text{ (S.I.)}$$

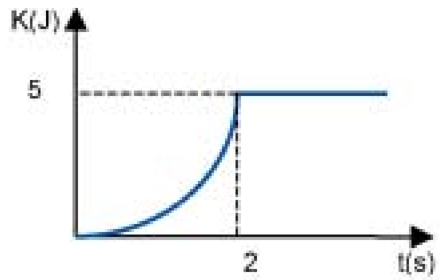
Για χρόνο $t > t_1 = 2s$ η κινητική ενέργεια της σφαίρας λόγω περιστροφής παραμένει σταθερή και ίση με

$$K = \frac{1}{2} I\cdot[\omega(t_1)]^2 \text{ ή } K = 5J.$$

Τελικά, η σχέση της μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας λόγω περιστροφής σε συνάρτηση με το χρόνο t (στο S.I.) είναι η:

$$K(t) = \begin{cases} 1{,}25t^2, & 0 \le t \le 2s \\ 5, & t > 2s \end{cases}$$

Η γραφική της παράσταση σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

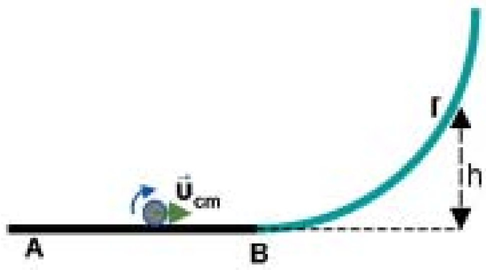


*Σχήμα 3*

**ΘΕΜΑ 2°**

Μικρή συμπαγής ομογενής σφαίρα μάζας m = 1 Kg και ακτίνας r κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα του κέντρου μάζας της $\upsilon_{cm}$ = 10m/s. Στην πορεία της συναντά λείο τεταρτοκύκλιο ακτίνας R = 7 m και ανέρχεται σε αυτό μέχρι ενός μέγιστου ύψους h.

Η ακτίνα της σφαίρας είναι αμελητέα σε σχέση με την ακτίνα του τεταρτοκυκλίου (r << R) και η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της είναι $I = \frac{2}{5}mr^2$.




Η κινητική ενέργεια της σφαίρας στο ανώτερο σημείο Γ της τροχιάς της είναι:

Α) $K_Γ$ = 0 J Β) $K_Γ$ = 20 J Γ) $K_Γ$ = 50 J Δ) $K_Γ$ = 70 J

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: g = 10m/s$^2$.

**ΛΥΣΗ**

Η σφαίρα στο οριζόντιο επίπεδο κυλίεται χωρίς ολίσθηση. Άρα έχει κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης.

$$K = K_{μετ} + K_{περ} = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{5}mr^2\left(\frac{\upsilon_{cm}}{r}\right)^2 = \frac{7}{10}m\upsilon_{cm}^2 \text{ ή } K = 70J$$

Κατά την άνοδό της στο τεταρτοκύκλιο αφού δεν υπάρχουν τριβές, δεν υπάρχει δύναμη που να δημιουργεί ροπή η οποία να επηρεάζει την περιστροφή της σφαίρας γύρω από τον άξονά της. Έτσι εξακολουθεί να περιστρέφεται κατά την άνοδό της στο τεταρτοκύκλιο με τη σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{\upsilon_{cm}}{r}$ που είχε στο οριζόντιο επίπεδο.

Η μεταφορική της όμως ταχύτητα ελαττώνεται υπό την επίδραση του βάρους μέχρι να μηδενιστεί στο ανώτερο σημείο Γ της τροχιάς της. Εκεί, η σφαίρα έχει κινητική ενέργεια μόνο λόγω περιστροφής, δηλαδή:

$$K_Γ = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\omega^2 = \frac{1}{5}mr^2\left(\frac{\upsilon_{cm}}{r}\right)^2 = \frac{1}{5}m\upsilon_{cm}^2 \text{ ή } K_Γ = 20J$$

Θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής βαρυτικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο μπορούμε να ισχυριστούμε πως η κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης ($K_{μετ} = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2$ = 50 J) που είχε η σφαίρα στο οριζόντιο επίπεδο έχει μετατραπεί σε δυναμική βαρυτική ενέργεια ($U = m\cdot g\cdot h$), λόγω της ανόδου της σφαίρας κατά ύψος $h = \frac{U}{m\cdot g}$ = 5m ψηλότερα από το οριζόντιο επίπεδο.

Επομένως, σωστή απάντηση είναι η Β.

## ΓΑΛΙΛΑΙΟΣ (1564-1642)

Ιταλός αστρονόμος, φιλόσοφος και κατά πολλούς ο πρώτος επιστήμονας φυσικός. Σίγουρα ο Galileo Galilei υπήρξε ο πρώτος που αντικατέστησε την υποθετική μέθοδο με την πειραματική και άνοιξε το δρόμο στην έρευνα. Ήταν επανάσταση για την εποχή αυτό, αφού οι συστηματικές αστρονομικές του ανακαλύψεις και κυρίως η διατύπωση του πρώτου νόμου για την κίνηση των ουράνιων σωμάτων ήρθαν σε απόλυτη σύγκρουση με το κυρίαρχο παπικό καθεστώς της Ρωμαιοκαθολικής Εκκλησίας εξ ού οι διώξεις και οι φυλακίσεις του (μόλις το 1992 αποκατέστησε τη μνήμη του ο Πάπας!!!). Απτόντος ο Γαλιλαίος πρόλαβε να στηρίξει τις θεωρίες της κίνησης, από τον Αρχιμήδη μέχρι τον Κοπέρνικο, να αποκαλύψει ότι και η Σελήνη κινείται γύρω από τη Γη και τον εαυτό της, να δει τον δακτύλιο του Κρόνου, τις ηλιακές κηλίδες και τις φάσεις της Αφροδίτης μέσα από το νέο τηλεσκόπιο που έφτιαξε και να αποδείξει την ισχύ της ηλιοκεντρικής θεωρίας. Ίσως δεν είναι τυχαίο που ο θάνατός του συνέπεσε με τη γέννηση του συνεχιστή Νεύτωνα…