ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΖΑΜΠΕΛΗΣ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ

- Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $x_0\in\mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και παρουσιάζει τοπικό (ή ολικό) ακρότατο σε αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$
- Αν για τη συνάρτηση $f:(\alpha,+\infty)\to\mathbb{R}$, ισχύουν: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}^*$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\beta\in\mathbb{R}$, τότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ (Θ. FERMAT) – ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θέμα 1°

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε να ισχύει: $f^3(x)+4^{f(x)}=8x-2x^2+16$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να βρείτε την τιμή των ακροτάτων.

γ. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ισχύουν: $3f(x)-xg^2(x)\le 6-\dfrac{e^2}{2}$, (1), για κάθε $x>0$,

$g(2)=\dfrac{e}{2}$, g' συνεχής, $g'(1)>0$

Να υπολογίσετε την τιμή $g'(2)$ και να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi>0$, τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0$

Λύση

α. Οι συναρτήσεις $f^3(x)$, $4^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ (ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων), οπότε παραγωγίζοντας τη σχέση της υπόθεσης έχουμε:

$3f^2(x)f'(x)+4^{f(x)}f'(x)\ln 4=8-4x \Leftrightarrow f'(x)\left(3f^2(x)+4^{f(x)}\ln 4\right)=4(2-x)$, (2)

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $3f^2(x)+4^{f(x)}\ln 4>0$, οπότε από τη (2) συμπεραίνουμε:

ότι οι συναρτήσεις $f'(x)$ και $h(x)=2-x$ έχουν το ίδιο πρόσημο και

ότι οι εξισώσεις $f'(x)=0, h(x)=0$ είναι ισοδύναμες.

Συνεπώς $f'(x)=0 \Leftrightarrow h(x)=0 \Leftrightarrow 2-x=0 \Leftrightarrow x=2$ και

$f'(x)>0 \Leftrightarrow h(x)>0 \Leftrightarrow 2-x>0 \Leftrightarrow x<2$

Επομένως:

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,2]$ αφού είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο $(-\infty,2]$ και ισχύει $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(-\infty,2)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$ αφού είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο $[2,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)<0$, για κάθε $x\in(2,+\infty)$

Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_o=2$, το $f(2)$

β. Για $x=2$ από τη σχέση της υπόθεσης παίρνουμε: $f^3(2)+4^{f(2)}=24$, (3)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=x^3+4^x$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $F'(x)=3x^2+4^x\ln 4>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως και «1 – 1» σ' αυτό.

Η (3) είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$F(f(2))=F(2)$, αφού $F(2)=2^3+4^2=24$ και $F(f(2))=f^3(2)+4^{f(2)}$

Συνεπώς από $F(f(2))=F(2)$ έχουμε $f(2)=2$, επειδή F:«1 – 1»

γ. Η (1) γίνεται $3f(x)-xg^2(x)-6+\dfrac{e^2}{2}\le 0$, (4), για κάθε $x>0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση G, με:

$G(x)=3f(x)-xg^2(x)-6+\dfrac{e^2}{2}$, $x>0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Ακόμη $G(2)=3f(2)-2g^2(2)-6+\dfrac{e^2}{2}\underset{\text{υπόθ.}}{\overset{\beta.}{=}}6-2\dfrac{e^2}{4}-6+\dfrac{e^2}{2}=0$

Επομένως η (4) γίνεται $G(x)\le G(2)$, για κάθε $x>0$,

δηλαδή η G παρουσιάζει (ολικό μέγιστο) στο $x_o=2\in(0,+\infty)$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $G'(2)=0$

Όμως $G'(x)=3f'(x)-g^2(x)-2xg(x)g'(x)$, που για $x=2$ γίνεται:

$G'(2)=3f'(2)-g^2(2)-4g(2)g'(2)\underset{\text{υπόθ.}}{\overset{f'(2)=0}{\Leftrightarrow}}0=-\dfrac{e^2}{4}-4\dfrac{e}{2}g'(2)\Leftrightarrow g'(2)=-\dfrac{e}{8}$

Η g' είναι συνεχής στο $[1,2]\subset(0,+\infty)$ (υπόθεση),

$g'(1)>0$ (υπόθεση) και $g'(2)=-\dfrac{e}{8}<0$, άρα $g'(1)g'(2)<0$, δηλαδή,

ισχύουν οι υποθέσεις του θ. Bolzano για την g' στο διάστημα $[1,2]$

Άρα,

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)\subset(0,+\infty)$, (άρα $\xi>0$), τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0$

Θέμα 2°

Έστω, συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f'(x)=2+e^{f(x)-3x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=-\ln 5$ και συνάρτηση g με $g(x)=2+e^{2x-f(x)}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=2x-\ln(4+e^{-x})$, $x\in\mathbb{R}$

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο M(0, f(0))

iii) Να δείξετε ότι ισχύει $5\ln\left(\frac{4e^x+1}{5e^x}\right)+x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με $x\neq 0$

iv) Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Λύση

i) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων 2x–f(x) και e^x+2,

οπότε: $g'(x)=\left(e^{2x-f(x)}+2\right)'=\left(e^{2x-f(x)}\right)'=e^{2x-f(x)}\left(2x-f(x)\right)'=e^{2x-f(x)}\left(2-f'(x)\right)$, (1)

Όμως $f'(x)=2+e^{f(x)-3x}$, (2), άρα από (1), (2) παίρνουμε $g'(x)=e^{2x-f(x)}\left(2-2-e^{f(x)-3x}\right)\Leftrightarrow g'(x)=-e^{-x}$

$\Leftrightarrow g'(x)=\left(e^{-x}\right)'$, άρα $g(x)=e^{-x}+c$, $c\in\mathbb{R}$, (3). Είναι $g(x)=2+e^{2x-f(x)}\overset{(3)}{\Leftrightarrow} e^{-x}+c=2+e^{2x-f(x)}$,

που για x = 0 γίνεται $1+c=e^{-f(0)}+2\overset{\text{υπόθ.}}{\Leftrightarrow}1+c=e^{\ln 5}+2\Leftrightarrow c=6$. Συνεπώς θα ισχύει:

$e^{-x}+6=e^{2x-f(x)}+2\Leftrightarrow e^{2x-f(x)}=e^{-x}+4\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x-f(x)}\right)=\ln\left(e^{-x}+4\right)\Leftrightarrow$

$2x-f(x)=\ln\left(e^{-x}+4\right)\Leftrightarrow f(x)=2x-\ln\left(e^{-x}+4\right)$, $x\in\mathbb{R}$

ii) Είναι $f(x)=2x-\ln\left(e^{-x}+4\right)$, $x\in\mathbb{R}$, άρα,

$$f'(x)=\left[2x-\ln\left(e^{-x}+4\right)\right]'=(2x)'-\left[\ln\left(e^{-x}+4\right)\right]'=2-\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+4}=2+\frac{1}{1+4e^x}$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ αφού $\frac{1}{4e^x+1}$ είναι πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$

Έτσι $\left(f'(x)\right)'=\left(\frac{1}{4e^x+1}+2\right)'\Leftrightarrow f''(x)=-\frac{4e^x}{\left(4e^x+1\right)^2}<0$, $x\in\mathbb{R}$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$,

άρα η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(0,-\ln 5)$ είναι:

$y-f(0)=f'(0)\cdot x\Leftrightarrow y=\frac{11}{5}x-\ln 5$, αφού $f'(x)=2+\frac{1}{1+4e^x}$, όπου για x = 0 παίρνουμε: $f'(0)=\frac{1}{5}+2=\frac{11}{5}$

iii) Είναι:

$5\ln\left(\frac{4e^x+1}{5e^x}\right)+x>0\Leftrightarrow 5\ln\left(\frac{4+e^{-x}}{5}\right)+x>0\Leftrightarrow \ln\left(4+e^{-x}\right)-\ln 5>-\frac{x}{5}\Leftrightarrow \ln\left(4+e^{-x}\right)-\ln 5>2x-\frac{11}{5}x$

$\Leftrightarrow 2x-\ln\left(4+e^{-x}\right)<\frac{11}{5}x-\ln 5\Leftrightarrow f(x)<\frac{11}{5}x-\ln 5$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$,

αφού η C_f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της $\varepsilon: y=\frac{11}{5}x-\ln 5$ σε κάθε σημείο (επειδή η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$), εκτός του σημείου επαφής $M(0,-\ln 5)$ όπου $C_f\equiv\varepsilon$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει $5\ln\left(\frac{4e^x+1}{5e^x}\right)+x>0$

iv) Για $x<0$ έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-\ln\left(4+e^{-x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2-\frac{\ln\left(4+e^{-x}\right)}{x}\right]$, (4)

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(4+e^{-x}\right)}{x}\underset{\text{D.L.H}}{\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(\ln\left(4+e^{-x}\right)\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{4+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{1+4e^x}\right)=-1$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$,

άρα, αντικαθιστώντας στην (4) έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2+1=3$

Ακόμη για $x<0$ έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x-\ln\left(4+e^{-x}\right)\right)\overset{+\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln e^{-x}-\ln\left(e^{-x}+4\right)\right)=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln\frac{e^{-x}}{4+e^{-x}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(\frac{1}{1+4e^x}\right)\right]=\ln 1=0$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

Συνεπώς η ευθεία y = 3x είναι ασύμπτωτη (πλάγια) της C_f στο $-\infty$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΠΙΕΡ ΝΤΕ ΦΕΡΜΑ (1601-1665)

Για νομικός ξεκίνησε στο πανεπιστήμιο της Τουλούζ αλλά από ...ψυχαγωγική διάθεση βρέθηκε να συνεργάζεται με τον Μπλεζ Πασκάλ στην πιθανοθεωρία και τον Ρενέ Ντεκάρτ στην αναλυτική γεωμετρία. Εργάστηκε επίσης σε θέματα στατικής και οπτικής και μια αρχή της γεωμετρικής οπτικής φέρει το όνομά του. Ο Φερμά συνήθιζε να ανακοινώνει τα ευρήματά του σε επιστολές προς τους συμπατριώτες του Γάλλους μαθηματικούς (ο ίδιος είχε βασική καταγωγή), γι αυτό και το έργο του, που αργότερα συνέλεξε ο γιος του Σαμουέλ, έχει χαρακτήρα αποσπασμάτων από επιστημονική αλληλογραφία. Το πιο εντυπωσιακό θεώρημα του Φερμά - «η εικασία του Φερμά» - στην αριθμοθεωρία είναι αυτό το οποίο αποφαίνεται ότι το άθροισμα των νιοστών δυνάμεων των x και y είναι αδύνατο να είναι ίσο με τη νιοστή δύναμη του z - όπου x, y, z ακέραιοι διάφοροι του μηδενός - πάντα όταν ο ν είναι ακέραιος μεγαλύτερος από το 2. Ως προπομπός της αναλυτικής γεωμετρίας, αφού ήταν ο πρώτος που την εφάρμοσε στο χώρο των τριών διαστάσεων, ο Φερμά συνέβαλε τα μέγιστα στη μεθοδολογία του Ντεκάρτ, ώστε να συνταχθεί η περίφημη «καρτεσιανή γεωμετρία». Αξιοσημείωτη ήταν και η ανάπλαση διαφόρων χαμένων έργων Ελλήνων μαθηματικών που επιχείρησε ο Φερμά ως βαθύς γνώστης της ελληνικής γραμματείας που ήταν.