ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΝΟΥΛΗΣ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ

- Αν f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)' = f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ και g παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$\left(\int_\alpha^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ - Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$

Θέμα 1°

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,\ +\infty)$ παραγωγίσιμη, για την οποία: $2f'(x)=\dfrac{e^x}{f(x)+2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=\sqrt{5}-2$

α) Να προσδιορίσετε την συνάρτηση f

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f

γ) Αν h συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [1, 2] και $h(x)<0$, να δείξετε ότι η εξίσωση:

$e^x-\int_1^x e^{f^{-1}(t)}h(t)dt=4$, έχει μοναδική λύση στο διάστημα (1, 2)

Λύση

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $2f'(x)=\dfrac{e^x}{f(x)+2} \Leftrightarrow 2f'(x)f(x)+4f'(x)=e^x$, άρα $\left[f^2(x)\right]'+\left[4f(x)\right]'=\left(e^x\right)'$, οπότε

$\left[f^2(x)+4f(x)\right]'=\left(e^x\right)'$, (1). Οι συναρτήσεις $f^2(x)+4f(x)$ (f συνεχής ως παραγωγίσιμη), e^x, είναι συνεχείς,

άρα από (1) έχουμε: $f^2(x)+4f(x)=e^x+c$, (2), $c\in\mathbb{R}$

Όμως $f(0)=\sqrt{5}-2$, επομένως για $x=0$ από (2), έχουμε:

$f^2(0)+4f(0)=e^0+c \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}-2\right)^2+4\left(\sqrt{5}-2\right)=1+c \Leftrightarrow 5-4\sqrt{5}+4+4\sqrt{5}-8=1+c \Leftrightarrow c=0$, άρα

$f^2(x)+4f(x)=e^x \Leftrightarrow \left(f(x)+2\right)^2=e^x+4$

Οπότε $f(x)+2=\sqrt{e^x+4}$, αφού $f(x)+2$, e^x+4 συνεχείς και $f(x)+2>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Επομένως, $f(x)=\sqrt{e^x+4}-2,\ x\in\mathbb{R}$

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{e^x}{2\left(f(x)+2\right)}>0$, άρα

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αφού είναι και συνεχής σ' αυτό ως παραγωγίσιμη, συνεπώς είναι '1-1', δηλαδή αντιστρέφεται.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θέτουμε $f(x)=\psi \Leftrightarrow \sqrt{e^x+4}-2=\psi>0$

Έτσι, $x=f^{-1}(\psi)$ και από $\sqrt{e^x+4}-2=\psi \Leftrightarrow \sqrt{e^x+4}=\psi+2 \Leftrightarrow e^x+4=(\psi+2)^2 \Leftrightarrow e^x=\psi^2+4\psi,\ \psi>0$

Οπότε,

$x=\ln\left(\psi^2+4\psi\right),\ \psi>0$ και $f^{-1}(\psi)=\ln\left(\psi^2+4\psi\right),\ \psi>0$, επομένως $f^{-1}(x)=\ln\left(x^2+4x\right),\ x>0$

γ) Είναι $e^{f^{-1}(x)}=e^{\ln(x^2+4x)}=x^2+4x,\ x>0$, άρα $e^x-\int_1^x e^{f^{-1}(t)}h(t)dt=4 \Leftrightarrow e^x-\int_1^x\left(t^2+4t\right)h(t)dt-4=0$

Έτσι,

θεωρώντας τη συνάρτηση $g(x)=e^x-\int_1^x\left(t^2+4t\right)h(t)dt-4,\ x\in[1,\ 2]$,

αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x)=0$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (1, 2)

Οι συναρτήσεις t^2+4t, $h(t)$ είναι συνεχείς στο [1, 2],

άρα η συνάρτηση $\int_1^x\left(t^2+4t\right)h(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη ως αρχική της $\left(x^2+4x\right)h(x)$ στο [1, 2].

Επομένως η g είναι παραγωγίσιμη στο [1, 2] (e^x-4 : παραγωγίσιμη), με $g'(x)=e^x-\left(x^2+4x\right)h(x)$

Για $x\in[1,\ 2]$ έχουμε: $x^2+4x>0$ και $h(x)<0$, άρα

$e^x-\left(x^2+4x\right)h(x)>0$, δηλαδή $g'(x)>0$ και επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο [1, 2]

αφού είναι και συνεχής σ' αυτό.

Η g είναι συνεχής στο [1, 2] ως παραγωγίσιμη και $g(1)=e-4<0$, ακόμη:

$g(2)=e^2+\int_1^2-\left(t^2+4t\right)h(t)dt-4>0$, αφού $\left(t^2+4t\right)h(t)<0 \Leftrightarrow -\left(t^2+4t\right)h(t)>0$,

άρα $\int_1^2-\left(t^2+4t\right)h(t)dt>0$, για $t\in[1,\ 2]$ και $e^2-4>0$

Συνεπώς:

$g(1)\cdot g(2)<0$, άρα, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,\ 2)$,

τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$. Το x_0 είναι μοναδικό αφού η g είναι γνησίως αύξουσα στο [1, 2]

Θέμα 2°

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(4) = -5$. Να δείξετε ότι:

α) i. Η συνάρτηση $h(x) = \int_4^{-x} f(u)du$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, ii. Ισχύει $h(x) > 5x + 20$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq -4$

β) Αν $\kappa < 0$, τότε: $4\int_0^{\kappa} f(x)dx - \kappa\int_0^4 f(x)dx > 0$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \leq -4$, ισχύει $\int_4^{-x}\left(\int_4^{-t} f(u)du\right)dt \geq \frac{5}{2}(x-4)^2 - 160$

Λύση

α) i. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη, άρα η $\int_4^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη ως αρχική της f

Επομένως η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων $-x$, $\int_4^x f(u)du$, με $h'(x) = -f(-x)$. Η h′ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ αφού είναι σύνθεση των παραγωγίσιμων: $-x$, $-f(x)$, με $h''(x) = f'(-x) > 0$ (υπόθεση).

Έτσι αφού $h''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η h είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ (h συνεχής στο $\mathbb{R}$)

ii. Είναι $h(-4) = \int_4^4 f(u)\,du = 0$ και $h'(-4) = -f(4) = 5$ (υπόθεση), άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_h στο $(-4, 0)$, είναι: $y - h(-4) = h'(-4)(x+4)$, που γράφεται ισοδύναμα $y = 5(x+4) \Leftrightarrow y = 5x + 20$

Η ευθεία ε: $y = 5x + 20$, βρίσκεται ''κάτω'' από τη C_h σε κάθε σημείο αυτής (αφού h κυρτή) εκτός του σημείου $(-4, 0)$ στο οποίο ταυτίζονται. Δηλαδή, ισχύει: $h(x) > 5x + 20$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $x \neq -4$

β) Είναι $\kappa < 0$, οπότε $-\kappa > 0$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στα διαστήματα: $[-4,\ 0]$, $[0,\ -\kappa]$

Συνεπώς, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής για την h στα παραπάνω διαστήματα.

Άρα, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (-4, 0)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (0, -\kappa)$ τέτοια, ώστε:

$$h'(\xi_1) = \frac{h(0) - h(-4)}{0+4},\ (1) \quad \text{και} \quad h'(\xi_2) = \frac{h(-\kappa) - h(0)}{-\kappa},\ (2)$$

Η h είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και συνεχής σ΄αυτό, οπότε η h′ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Είναι $\xi_1 < \xi_2$, άρα και $h'(\xi_1) < h'(\xi_2) \overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow} \frac{h(0) - h(-4)}{4} < \frac{h(-\kappa) - h(0)}{-\kappa}$

$$\overset{h(-4)=0}{\Leftrightarrow} \frac{h(0)}{4} < \frac{h(-\kappa) - h(0)}{-\kappa} \Leftrightarrow \frac{h(0)}{4} + \frac{h(-\kappa) - h(0)}{\kappa} < 0 \Leftrightarrow \kappa h(0) + 4h(-\kappa) - 4h(0) > 0$$

$$\Leftrightarrow \kappa\int_4^0 f(u)\,du + 4\left(\int_4^{\kappa} f(u)\,du - \int_4^0 f(u)\,du\right) > 0 \Leftrightarrow \kappa\int_4^0 f(u)\,du + 4\int_0^{\kappa} f(u)\,du > 0 \Leftrightarrow 4\int_0^{\kappa} f(u)\,du - \kappa\int_0^4 f(u)\,du > 0$$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \leq 4$, θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \int_4^{-x}\left(\int_4^{-t} f(u)du\right)dt - \frac{5}{2}(x-4)^2$

Η $h(t) = \int_4^{-t} f(u)du$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη, άρα η $\int_4^{-x}\left(\int_4^{-t} f(u)du\right)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,\ 4]$ ως σύνθεση των $-x$, $\int_4^x h(t)\,dt$ (αρχική της h).

Επομένως η φ(x) είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,\ 4]$ ως διαφορά των παραγωγίσιμων συναρτήσεων:

$\int_4^{-x}\left(\int_4^{-t} f(u)du\right)dt$ και $\frac{5}{2}(x-4)^2$, με $\varphi'(x) = \left(\int_4^{-x}\left(\int_4^{-t} f(u)du\right)dt\right)' - \left(\frac{5}{2}(x-4)^2\right)' = \left(\int_4^{-x} h(t)dt\right)' - 5(x-4) = -h(-x) - 5(x-4)$. Η $\varphi'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,\ 4]$ ως διαφορά των παραγωγίσιμων συναρτήσεων: $-h(-x)$, $5(x-4)$

Άρα, $(\varphi'(x))' = [-h(-x) - 5(x-4)]' \Leftrightarrow \varphi''(x) = h'(-x) - 5$

Για $x < 4 \Leftrightarrow -x > -4$, έχουμε: $h'(-x) > h'(-4)$ (αφού h είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και συνεχής σ΄αυτό).

Οπότε, $h'(-x) > 5$ $(h'(-4) = 5$, από α.ii$) \Leftrightarrow h'(-x) - 5 > 0 \Leftrightarrow \varphi''(x) > 0$, δηλαδή $\varphi'(x)$ γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ 4]$ αφού είναι και συνεχής σ΄αυτό. Έτσι για $x < 4$ είναι: $\varphi'(x) < \varphi'(4)$

$\Leftrightarrow \varphi'(x) < 0$, $(\varphi'(4) = -h(-4) - 5(4-4) = 0)$, άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ 4]$, αφού είναι και συνεχής σε αυτό ως παραγωγίσιμη. Συνεπώς και για $x \leq -4$, θα ισχύει: $\varphi(x) \geq \varphi(-4)$

$$\Leftrightarrow \int_4^{-x}\left(\int_4^{-t} f(u)du\right)dt - \frac{5}{2}(x-4)^2 \geq \int_4^4\left(\int_4^{-t} f(u)du\right)dt - \frac{5}{2}(-4-4)^2 \Leftrightarrow \int_4^{-x}\left(\int_4^{-t} f(u)du\right)dt \geq \frac{5}{2}(x-4)^2 - 160$$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΜΠΟΝΑΒΕΝΤΟΥΡΑ ΚΑΒΑΛΙΕΡΙ (1598-1647)

Ιταλός μαθηματικός που κατατάσσεται στους πρωτοπόρους του απειροστικού λογισμού. Στα δεκαεπτά του προσχώρησε στο τάγμα των Ιησουιτών και στάλθηκε στην Πίζα για να σπουδάσει μαθηματικά. Από το 1629 έως το θάνατό του δίδαξε μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο της Μπολώνιας. Τη φήμη του οφείλει στο έργο του «Γεωμετρία των αδιαίρετων συνεχών» (Geometria Indivisibilibus Continuorum, 1635), όπου πραγματεύεται απλά θέματα του απειροστικού λογισμού με μία μέθοδο βασισμένη στην αντίληψή του για το «αδιαίρετο». Η μέθοδός του τον οδήγησε σε ορισμένα ορθά αποτελέσματα, αλλά οι βασικές παραδοχές του δεν ευσταθούν σήμερα και δέχθηκαν τις επικρίσεις των συγχρόνων του. Το έργο του αυτό, που αποτελείται από επτά βιβλία, παρακίνησε σημαντικό αριθμό μαθηματικών να εγκύψουν στη μελέτη προβλημάτων σχετικών με απειροστά. Ο ίδιος ασχολήθηκε και με άλλα μαθηματικά θέματα. Ειδικά, συντέλεσε στην διάδοση στην Ιταλία της θεωρίας των λογάριθμων και της εφαρμογής της σε αρκετά τριγωνομετρικά προβλήματα. Έχει επίσης συγγράψει μελέτες που αναφέρονται σε θέματα οπτικής, αστρονομίας και αστρολογίας.