ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΝΙΚΟΣ ΤΑΣΟΣ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΥΡΙΑΖΗΣ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΝΟΥΛΗΣ
ΝΙΚΟΣ ΚΟΚΟΛΗΣ

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και τις ευθείες x=α, x=β, είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta |f(x)|dx$

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ - ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

Θέμα 1°

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, τέτοια, ώστε $f(1)=-\frac{1}{2}$, $f''(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x)=\int_{x-1}^{3-x} f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$.

i) Να μελετήσετε τη g ως προς την κυρτότητα και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της C_g.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο Α(2, g(2)) και να δείξετε ότι ισχύει:
$\int_{x-1}^{3-x} f(t)dt \le x-2$, για κάθε $x\ge 2$.

iii) Να δείξετε ότι $2\int_0^2 f(t)dt < \int_{-1}^3 f(t)dt$.

Λύση

i) Για $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι $\int_{x-1}^{3-x} f(t)dt=\int_\alpha^{3-x} f(t)dt-\int_\alpha^{x-1} f(t)dt$ και θεωρώντας την $h(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ έχουμε: $g(x)=h(3-x)-h(x-1)$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αρχική της συνεχούς στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης f και επομένως $h'(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ (1).

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων (αφού h(3 – x), h(x – 1) είναι συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων), με $g'(x)=-h'(3-x)-h'(x-1)\overset{(1)}{=}-f(3-x)-f(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων (αφού f(3 – x), f(x – 1) είναι συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $g''(x)=f'(3-x)-f'(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$ (2).

Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αφού $f''(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως:

- Για $x<2 \Leftrightarrow 3-x>x-1 \Leftrightarrow f'(3-x)>f'(x-1)\overset{(2)}{\Leftrightarrow} g''(x)>0$, άρα η g είναι κυρτή στο $(-\infty,2]$ (αφού g συνεχής στο $(-\infty,2]$).
- Για $x>2 \Leftrightarrow 3-x<x-1 \Leftrightarrow f'(3-x)<f'(x-1)\overset{(2)}{\Leftrightarrow} g''(x)<0$, άρα η g είναι κοίλη στο $[2,+\infty)$ (αφού g συνεχής στο $[2,+\infty)$).

Ακόμη $g''(2)=f'(1)-f'(1)$ (λόγω (2)) $\Leftrightarrow g''(2)=0$, επομένως η g παρουσιάζει καμπή στο $x_o=2$ το g(2) = h(1) – h(1) = 0.

ii) Είναι $g'(x)=-f(3-x)-f(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$ επομένως $g'(2)=-2f(1)\overset{\text{υποθ.}}{=}1$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο Α(2, 0) της C_g είναι: $y-g(2)=g'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=x-2$.

Στο $[2,+\infty)$ η g είναι κοίλη και επομένως η C_g θα βρίσκεται ''κάτω'' από την εφαπτομένη της (με εξαίρεση το σημείο επαφής) y = x – 2, για κάθε $x\ge2$. Συνεπώς θα ισχύει $g(x)\le x-2$, για κάθε $x\ge 2$, άρα:
$\int_{x-1}^{3-x} f(t)dt\le x-2$.

iii) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε ισχύουν για αυτήν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα [0, 1] και [1, 2]. Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(0,1)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(1,2)$ (άρα $\xi_1<\xi_2$) τέτοια ώστε $g'(\xi_1)=g(1)-g(0)$ (3) και $g'(\xi_2)=g(2)-g(1)$ (4).

Όμως στο $(-\infty,2]$ η g' είναι γνησίως αύξουσα (αφού $g''(x)>0$) και $\xi_1<\xi_2$ άρα $g'(\xi_1)<g'(\xi_2)\underset{(4)}{\overset{(3)}{\Leftrightarrow}}$

$\Leftrightarrow \int_0^2 f(t)dt-\int_{-1}^3 f(t)dt<-\int_0^2 f(t)dt \Leftrightarrow 2\int_0^2 f(t)dt<\int_{-1}^3 f(t)dt$.

Θέμα 2°

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\alpha+1]\to\mathbb{R}$, $\alpha>0$, τέτοια ώστε $f(x)\ne0$ για κάθε $x\in[\alpha,\alpha+1]$, $\int_\alpha^{\alpha+1} x^2 f(x)dx=3$ και η συνάρτηση $g(x)=\int_\alpha^x f(t)dt+\int_{\alpha+1}^x f(t)dt$.

Α. Να δείξετε ότι:

i) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (\alpha, \alpha+1)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = \dfrac{3}{\rho^2}$.

ii) Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \alpha+1]$.

iii) Η εξίσωση $\int_\alpha^x f(t)dt = \int_x^{\alpha+1} f(t)dt$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(\alpha, \alpha+1)$.

Β. Αν το εμβαδόν E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \alpha + 1$ είναι 1 τ.μ. να δείξετε ότι: $\int_\alpha^{\alpha+1} 2xg(x)dx = 2\alpha^2 + 2\alpha - 5$.

Λύση

Α. i) Είναι $f(\rho) = \dfrac{3}{\rho^2} \Leftrightarrow f(\rho)\rho^2 - 3 = 0$ (1). Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \int_\alpha^x t^2 f(t)dt - 3x$, $x \in [\alpha, \alpha+1]$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \alpha+1]$ αφού, η $t^2 f(t)$ είναι συνεχής σε αυτό άρα η $\int_\alpha^x t^2 f(t)dt$ είναι η αρχική της $x^2 f(x)$ και η $3x$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε επομένως:

$h'(x) = x^2 f(x) - 3$ άρα από (1) αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $h'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $\rho \in (\alpha, \alpha+1)$.

Έτσι: h παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \alpha+1]$ και $h(\alpha) = -3\alpha$, $h(\alpha+1) = \int_\alpha^{\alpha+1} t^2 f(t)dt - 3\alpha - 3 \overset{\text{υποθ.}}{=} 3 - 3\alpha - 3 = -3\alpha$ οπότε $h(\alpha) = h(\alpha+1)$. Συνεπώς από θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (\alpha, \alpha+1)$ τέτοιο, ώστε $h'(\rho) = 0$.

ii) Είναι $D_g = [\alpha, \alpha+1]$ (αφού $t \in [\alpha, \alpha+1]$ άρα και $x \in [\alpha, \alpha+1]$) και η g είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \alpha+1]$ επειδή οι συναρτήσεις $\int_\alpha^x f(t)dt$, $\int_{\alpha+1}^x f(t)dt$ είναι αρχικές της συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \alpha+1]$.
Οπότε $g'(x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$.
Είναι f συνεχής και μη μηδενική στο $[\alpha, \alpha+1]$ άρα διατηρεί πρόσημο σε αυτό. Όμως από ερώτημα Αi) $f(\rho) = \dfrac{3}{\rho^2} > 0$, $\rho \in (\alpha, \alpha+1)$ οπότε $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \alpha+1]$.
Επομένως $g'(x) > 0$, (g συνεχής στο $[\alpha, \alpha+1]$) άρα g γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \alpha+1]$.

iii) Έχουμε $\int_\alpha^x f(t)dt = \int_x^{\alpha+1} f(t)dt \Leftrightarrow \int_\alpha^x f(t)dt + \int_{\alpha+1}^x f(t)dt = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο $(\alpha, \alpha+1)$.
Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \alpha+1]$ (ως παραγωγίσιμη από Αii)) και $g(\alpha) = \int_{\alpha+1}^{\alpha} f(t)dt < 0$ ($f(x) > 0$ και $\alpha < \alpha+1$), $g(\alpha+1) = \int_\alpha^{\alpha+1} f(t)dt > 0$ ($f(x) > 0$ και $\alpha < \alpha+1$), άρα $g(\alpha)g(\alpha+1) < 0$. Συνεπώς από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \alpha+1)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi) = 0$ που επειδή g γνησίως αύξουσα (Αii)) στο $[\alpha, \alpha+1]$ η ρίζα ξ είναι μοναδική.

Β. $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \alpha+1]$, επομένως $E(\Omega) = E = \int_\alpha^{\alpha+1} f(x)dx = 1$.

Έχουμε $\int_\alpha^{\alpha+1} 2xg(x)dx = \int_\alpha^{\alpha+1} (x^2)' g(x)dx = \left[x^2 g(x)\right]_\alpha^{\alpha+1} - \int_\alpha^{\alpha+1} x^2 g'(x)dx \overset{\text{Aii)}}{=} \left[x^2 g(x)\right]_\alpha^{\alpha+1} - \int_\alpha^{\alpha+1} x^2 2f(x)dx =$

$$= (\alpha+1)^2 g(\alpha+1) - \alpha^2 g(\alpha) - 2\int_\alpha^{\alpha+1} x^2 f(x)dx \overset{\text{υποθ}}{=} (\alpha+1)^2 \int_\alpha^{\alpha+1} f(t)dt + \alpha^2 \int_\alpha^{\alpha+1} f(t)dt - 2\cdot 3 =$$

$$= (\alpha+1)^2 E + \alpha^2 E - 6 = (\alpha+1)^2 + \alpha^2 - 6 = 2\alpha^2 + 2\alpha - 5.$$

ΛΕΟΝΑΡΝΤ ΟΪΛΕΡ (1707-1783)

Κορυφαίος Ελβετός μαθηματικός με ευρετική ικανότητα και πλούσιο συγγραφικό έργο. Σπούδασε θεολογία και ιατρική στο Πανεπιστήμιο της γεννέτειράς του Βασιλείας, αλλά διέπρεψε ως μαθηματικός και γεωμέτρης στην αυλή του τσάρου της Ρωσίας και μέλος της Ακαδημίας Επιστημών της Αγίας Πετρούπολης, η οποία εξέδωσε και τα πρώτα έργα του. Υπήρξε ο εμπνευστής διαφόρων συμβολισμών που χρησιμοποιούνται ακόμα και σήμερα όπως ο συμβολισμός της συνάρτησης f(x), Σ για την άθροιση, e για τη βάση των φυσικών λογαρίθμων, i για τη φανταστική μονάδα - ρίζα του αριθμού 1 - ενώ καθιέρωσε και τον παλιό συμβολισμό π για το λόγο της περιφέρειας προς τη διάμετρό της. Στον τομέα της μαθηματικής ανάλυσης ο Όιλερ συνέγραψε ογκώδεις τόμους, όπου συγκεντρώνει συστηματικά όλο το υλικό περασμένων αιώνων και εισάγει νέα εξαγόμενα (π.χ το δίτομο «Εισαγωγή στην απειροστική ανάλυση»). Σημαντικό έργο άφησε ο Όιλερ και στον τομέα της αριθμοθεωρίας. Σ' αυτόν οφείλεται η πρώτη δημοσιευμένη απόδειξη για το «μικρό θεώρημα του Φερμά», ενώ εντυπωσιακή υπήρξε η θεώρησή του στη συνάρτηση «ζήτα» και στο συσχετισμό της με τη θεωρία των πρώτων αριθμών. Η «ευθεία του Όιλερ» και ο «κύκλος του Όιλερ» είναι οι κυριότερες σφραγίδες που άφησε ως ο διαπρεπέστερος μαθηματικός που προώθησε