ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΝΟΥΛΗΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΝΙΚΟΣ ΖΑΧΟΠΟΥΛΟΣ

• Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R},\ A \subseteq \mathbb{R}$, είναι και $1-1$ στο A

• Αν η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R},\ A \subseteq \mathbb{R}$ είναι $1-1$ στο A, τότε ισχύουν: $f^{-1}(f(x)) = x,\ x \in A$ και $f(f^{-1}(x)) = x,\ x \in f(A)$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1 - 1 - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Θέμα 1°

Έστω η συνάρτηση $f:(0,\ +\infty) \to \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει $\left|f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(\frac{1}{y}\right)\right| \ge \mu\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$, για κάθε $x, y \in (0,\ +\infty)$ και $\mu > 2$. Να δείξετε ότι:

α. Η f είναι $1-1$ στο $(0,\ +\infty)$

β. Η εξίσωση $f^{-1}(2x) = x$, έχει το πολύ μια ρίζα.

Λύση

α. Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,\ +\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ έχουμε: $|f(x_1) - f(x_2)| \ge \mu|x_1 - x_2|$ όπως προκύπτει από την αρχική σχέση για $x = \frac{1}{x_1},\ y = \frac{1}{x_2}$

Άρα $\mu|x_1 - x_2| \le 0 \overset{\mu>2}{\Leftrightarrow} |x_1 - x_2| \le 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, αφού $|x_1 - x_2| \ge 0$. Επομένως η f είναι $1-1$ στο $\mathbb{R}$, δηλαδή είναι αντιστρέψιμη.

β. Είναι $f^{-1}(2x) = x$, οπότε $f(f^{-1}(2x)) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = 2x$

Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει δύο ρίζες, τις ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 \ne \rho_2$

Στην αρχική σχέση για $x = \frac{1}{\rho_1},\ y = \frac{1}{\rho_2}$, παίρνουμε: $|f(\rho_1) - f(\rho_2)| \ge \mu|\rho_1 - \rho_2|$, (1)

Όμως $f(\rho_1) = 2\rho_1$ και $f(\rho_2) = 2\rho_2$, (2). Οπότε από (1) λόγω της (2) έχουμε:

$|2\rho_1 - 2\rho_2| \ge \mu|\rho_1 - \rho_2| \Leftrightarrow 2|\rho_1 - \rho_2| \ge \mu|\rho_1 - \rho_2| \Leftrightarrow (\mu - 2)|\rho_1 - \rho_2| \le 0$, άρα $\mu \le 2$, $(\rho_1 \ne \rho_2)$, άτοπο από υπόθεση. Συνεπώς η εξίσωση $f^{-1}(2x) = x$, έχει το πολύ μια ρίζα.

Θέμα 2°

Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ισχύει $2f^3(x) + 3f(x) = 5x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (1)

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β. i) Να βρείτε που ανήκει το σύνολο των εικόνων M του μιγαδικού z, για τον οποίο ισχύει: $f(|z - 2i| - 3) > 0$

ii) Να υπολογίσετε την τιμή $f^{-1}(-1)$

Λύση

α Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 5x_1 < 5x_2 \overset{\text{υποθ.}}{\Leftrightarrow} 2f^3(x_1) + 3f(x_1) < 2f^3(x_2) + 3f(x_2) \Leftrightarrow 2(f^3(x_1) - f^3(x_2)) + 3(f(x_1) - f(x_2)) < 0 \Leftrightarrow$
$(f(x_1) - f(x_2))(2f^2(x_1) + 2f(x_1)f(x_2) + 2f^2(x_2) + 3) < 0$

Αλλά $2f^2(x_1) + 2f(x_1)f(x_2) + 2f^2(x_2) + 3 > 0$, αφού $2(f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2)) \ge 0$, επειδή η διακρίνουσα του τριωνύμου $f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2)$ ως προς $f(x_1)$, είναι $\Delta = -3f^2(x_2) \le 0$

Άρα $f(x_1) < f(x_2)$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β i) Για x = 0, η (1) γίνεται:

$2f^3(0) + 3f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(2f^2(0) + 3) = 0$, άρα $f(0) = 0$, αφού $2f^2(0) + 3 > 0$

Οπότε $f(|z - 2i| - 3) > 0 \Leftrightarrow f(|z - 2i| - 3) > f(0) \Leftrightarrow |z - 2i| - 3 > 0$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Συνεπώς $|z - 2i| - 3 > 0 \Leftrightarrow |z - 2i| > 3$, που φανερώνει ότι οι εικόνες M του μιγαδικού z, ανήκουν στο εξωτερικό μέρος του κυκλικού δίσκου με κέντρο το σημείο $K(0,2)$ και ακτίνα $\rho = 3$

ii) Για $x = -1$, η (1) γίνεται:

$2f^3(-1) + 3f(-1) = -5$, οπότε: $2f^3(-1) + 3f(-1) = -5 \Leftrightarrow 2(f^3(-1) + 1) + 3(f(-1) + 1) = 0 \Leftrightarrow$
$2(f(-1) + 1)(f^2(-1) - f(-1) + 1) + 3(f(-1) + 1) = 0 \Leftrightarrow (f(-1) + 1)(2f^2(-1) - 2f(-1) + 5) = 0$

Άρα $f(-1) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(-1) = -1$, αφού $2f^2(-1) - 2f(-1) + 5 > 0$, επειδή ως τριώνυμο ως προς $f(-1)$, έχει $\Delta = -36 < 0$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και $1-1$ σ' αυτό, επομένως αντιστρέφεται.

Έτσι από $f(-1) = -1$, έχουμε $f^{-1}(f(-1)) = f^{-1}(-1)$, άρα $f^{-1}(-1) = -1$ (ή $f^{-1}(-1)) = \alpha \Leftrightarrow \cdots$)

Θέμα 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και $f(A)=\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$f^5(x)+4f(x)=2x-36$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f^{-1}

iii. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

iv. Να δείξετε ότι οι εξισώσεις $f^{-1}(x)=f(x)$ και $f^{-1}(x)=x$ είναι ισοδύναμες και στη συνέχεια να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$

Λύση

i. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ θα δείξουμε ότι $x_1=x_2$. Είναι $f^5(x_1)=f^5(x_2)$, άρα $f^5(x_1)+4f(x_1)=f^5(x_2)+4f(x_2)$. Λόγω της ισότητας: $f^5(x)+4f(x)=2x-36$, (1), έχουμε $2x_1-36=2x_2-36 \Leftrightarrow x_1=x_2$. Συνεπώς η f είναι 1 – 1 στο $\mathbb{R}$

Επειδή η f είναι 1 – 1 αντιστρέφεται, δηλαδή ορίζεται η συνάρτηση f^{-1} για $x\in f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

ii. Θέτουμε f(x) = y, $y\in\mathbb{R}$ (αφού $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$) στην ισότητα (1), οπότε παίρνουμε:

$$y^5+4y=2x-36 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\left(y^5+4y+36\right),\ y\in\mathbb{R}.\ \text{Επομένως}\ f^{-1}(y)=\frac{1}{2}\left(y^5+4y+36\right),\ y\in\mathbb{R},$$

οπότε η αντίστροφη της f είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\left(x^5+4x+36\right)$, $x\in\mathbb{R}$

iii. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, έχουμε $x_1^5<x_2^5$ και $4x_1<4x_2$, οπότε:

$$x_1^5+4x_1<x_2^5+4x_2 \Leftrightarrow x_1^5+4x_1+36<x_2^5+4x_2+36 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x_1^5+4x_1+36\right)<\frac{1}{2}\left(x_2^5+4x_2+36\right)\Leftrightarrow$$

$f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$. Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

iv. Επειδή η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$, (2) είναι ισοδύναμη με την την εξίσωση $f^{-1}(x)=x$

- Έστω $\kappa\in\mathbb{R}$ ρίζα της εξίσωσης (2), τότε $f^{-1}(\kappa)=f(\kappa)$, (3). Θα δείξουμε ότι $f^{-1}(\kappa)=\kappa$

  Έστω $f^{-1}(\kappa)\neq\kappa$, δηλαδή $\left.\begin{matrix} f^{-1}(\kappa)>\kappa \\ \text{ή} \\ f^{-1}(\kappa)<\kappa \end{matrix}\right\},(4)$

  Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα οπότε από την (4) έχουμε ότι: $\left.\begin{matrix} f^{-1}\left(f^{-1}(\kappa)\right)>f^{-1}(\kappa) \\ \text{ή} \\ f^{-1}\left(f^{-1}(\kappa)\right)<f^{-1}(\kappa) \end{matrix}\right\},(5)$

  Η (3) γράφεται $f^{-1}\left(f^{-1}(\kappa)\right)=f^{-1}\left(f(\kappa)\right) \Leftrightarrow f^{-1}\left(f^{-1}(\kappa)\right)=\kappa$

  Οπότε από την (5) παίρνουμε αντιστοίχως $\left.\begin{matrix} \kappa>f^{-1}(\kappa) \\ \text{ή} \\ \kappa<f^{-1}(\kappa) \end{matrix}\right\}$, που είναι άτοπο, λόγω της (4)

  Άρα $f^{-1}(\kappa)=\kappa$

- Αν το κ είναι ρίζα της εξίσωσης $f^{-1}(x)=x$, δηλαδή $f^{-1}(\kappa)=\kappa$, θα έχουμε $f\left(f^{-1}(\kappa)\right)=f(\kappa) \Leftrightarrow \kappa=f(\kappa)$

  Επομένως $f(\kappa)=f^{-1}(\kappa)$, οπότε το κ είναι ρίζα και της εξίσωσης $f(x)=f^{-1}(x)$

Είναι λοιπόν, $f^{-1}(x)=f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow x^5+4x+36=2x \Leftrightarrow x^5+2x+36=0$.

Αν $g(x)=x^5+2x+36$, είναι $g(-2)=(-2)^5+2(-2)+36=0$, οπότε, η $x=-2$ είναι ρίζα της $g(x)=0$ και η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς η $x=-2$ είναι μοναδική ρίζα της $g(x)=0$, άρα και της εξίσωσης (2).

Ακόμη $f^{-1}(-2)=\frac{1}{2}\left[(-2)^5+4(-2)+36\right]=-2$, οπότε οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν κοινό σημείο το $M(-2,-2)$

Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, έχουμε $x_1^5<x_2^5$ και $2x_1<2x_2$, οπότε $x_1^5+2x_1<x_2^5+2x_2 \Leftrightarrow x_1^5+2x_1+36<x_2^5+2x_2+36 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΡΕΝΕ ΝΤΕΚΑΡΤ (1596-1650)

Γάλλος φιλόσοφος και μαθηματικός, ένας από τους επιφανέστερους διανοητές της ανθρωπότητας. Αν και σπούδασε νομικά, οι κύριες επιστημονικές εργασίες του, ιδιαίτερα από τότε που εγκαταστάθηκε στις Κάτω Χώρες (1629), είχαν φιλοσοφικό αντικείμενο. Τα βασικά του έργα «Λόγος περί της μεθόδου», «Στοχασμοί για την πρώτη φιλοσοφία», «Αρχές φιλοσοφίας» αποκαλύπτουν τις αντιλήψεις του περί των μεθόδων γνώσης («σκέπτομαι άρα υπάρχω» ήταν το απόσταγμα της πεποίθησής του για την αξία της αμφιβολίας ως αφετηρίας στην αναζήτηση της αλήθειας), της σχέσης σώματος-ψυχής και ύλης-πνεύματος, της ύπαρξης θεού. Η στοχευμένη προσπάθειά του να παντρέψει τα μαθηματικά με την τότε φυσική ήταν ακριβώς προέκταση των φιλοσοφικών στοχασμών του και οδήγησε σε ανακαλύψεις που πήγαν μπροστά την επιστήμη. Στη Γεωμετρία ο Ντεκάρτ ήταν ο πρώτος που εισήγαγε την έννοια του μεταβλητού μεγέθους και της μεταβλητής συνάρτησης. Η διπλή μορφή της μεταβλητής καθόρισε την ενότητα της γεωμετρίας και της άλγεβρας. Ο πραγματικός αριθμός ερμηνευόταν από τον Ντεκάρτ ως σχέση οποιουδήποτε τμήματος ευθείας απέναντι στο μοναδιαίο μήκος, ενώ οι αρνητικοί αριθμοί πήραν πραγματική ερμηνεία ως κατευθυνόμενες συντεταγμένες. Ο Ντεκάρτ βελτίωσε σημαντικά και το σύστημα συμβολισμού. Εισήγαγε τα σύμβολα x, y, z… για τα μεταβλητά μεγέθη και τους συντελεστές a, b, c…, καθώς και τον τρόπο γραφής των δυνάμεων, x4, a5 … Επίσης διατύπωσε τον κανόνα των σημείων για τον προσδιορισμό του αριθμού των θετικών και των αρνητικών ριζών, έθεσε το πρόβλημα του αναγώγιμου, έδειξε ότι η εξίσωση τρίτου βαθμού επιλύεται με τον τετραγωνισμό και λύνεται με τη συνδρομή διαβήτη και κανόνα. Η Γεωμετρία του Ντεκάρτ με τη μέθοδο του συστήματος των συντεταγμένων που δημιούργησε και με τον τρόπο κατασκευής των καθέτων και εφαπτομένων στις επίπεδες καμπύλες, βοήθησε σημαντικά το έργο των Νεύτωνα, Λάιμπνιτς, Όιλερ και όλων των άλλων μεγάλων που ακολούθησαν και άσκησε τεράστια επίδραση στην ανάπτυξη των μαθηματικών.