

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΔΙΟΝΥΣΗΣ ΣΥΝΟΔΙΝΟΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΤΖΑΓΚΑΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΩΛΗΣ ΤΡΑΜΠΑΚΟΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΠΑΠΑΠΑΝΟΥ



Η σύνθετη κίνηση που εκτελεί ένα σώμα όταν μετακινείται στο χώρο και ταυτόχρονα αλλάζει ο προσανατολισμός του μπορεί να μελετηθεί ως επαλληλία μιας μεταφορικής και μιας στροφικής κίνησης.

ΦΥΣΙΚΗ

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ - ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

A. Ένας ομογενής κύλινδρος μάζας $m = 0,6\text{Kg}$ και ακτίνας $R = 0,1\text{m}$ ισορροπεί πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο με γωνία κλίσης $\varphi = 30^\circ$ με τη βοήθεια αβαρούς, μη εκτατού νήματος που είναι πολλές φορές τυλιγμένο γύρω του. Το νήμα είναι παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο και είναι ακλόνητα στερεωμένο στο σημείο Σ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

i. Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης \vec{F} του νήματος που ασκείται στον κύλινδρο καθώς και το μέτρο της στατικής τριβής $\vec{T}_{\text{στ}}$ σε αυτόν.

ii. Διατηρώντας το νήμα συνεχώς παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο αυξάνουμε την γωνία κλίσης του κεκλιμένου επιπέδου. Παρατηρούμε πως όταν η γωνία κλίσης γίνει μεγαλύτερη μιας ορισμένης τιμής ο κύλινδρος αρχίζει να μετατοπίζεται διατηρώντας τον άξονα του παράλληλο προς της αρχική του διεύθυνση. Να υπολογίσετε την τιμή της γωνίας αυτής.

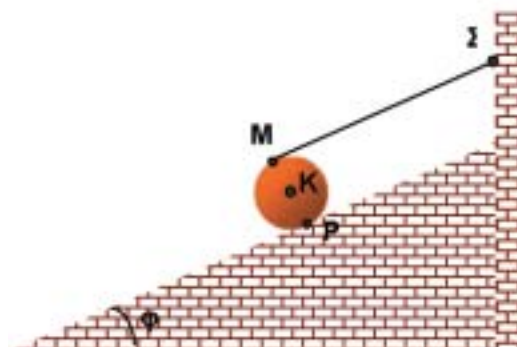
B. Αν η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου είναι $\theta = 53^\circ$ τότε ο κύλινδρος μετατοπίζεται πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. Θεωρώντας ως $t = 0\text{s}$ τη χρονική στιγμή που ο κύλινδρος αρχίζει να μετατοπίζεται, να υπολογίσετε

i. το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου και το μέτρο της τάσης του νήματος που ασκείται σε αυτόν

ii. τη γωνιακή ταχύτητα καθώς και τον αριθμό των περιστροφών που έχει διαγράψει τη χρονική στιγμή $t = 1,5\text{s}$.

iii. την ταχύτητα του κατώτερου σημείου P του κυλίνδρου και ενός σημείου N που απέχει $h = \frac{3R}{2}$ από το κεκλιμένο επίπεδο και βρίσκεται πάνω στη διάμετρο MP του κυλίνδρου όταν ο κύλινδρος έχει περιστραφεί κατά $\Delta\varphi = 21,6\text{rad}$.

Δίνονται: η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = \frac{1}{2}mR^2$, ο συντελεστής τριβής ολίσθησης του κυλίνδρου με το κεκλιμένο επίπεδο $\mu = 0,5$, $\eta_{53^\circ} = 0,8$ και $\text{syn}53^\circ = 0,6$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Λύση

A.i. Στον κύλινδρο ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος (\vec{w}) το οποίο αναλύεται σε δύο κάθετες συνιστώσες με $w_x = mg \cdot \eta\mu\varphi$ και $w_y = mg \cdot \sigma\upsilon\eta\varphi$
- η κάθετη αντίδραση (\vec{N})
- η στατική τριβή ($\vec{T}_{\text{στ}}$) και

- η τάση του νήματος (\vec{F})
- Εφόσον ο κύλινδρος ισορροπεί σύμφωνα με τις συνθήκες ισορροπίας στερεού σώματος θα ισχύει:

$$\Sigma \vec{T}_{(K)} = 0 \text{ ή } T_{w(K)} + T_{N(K)} + T_{F_1(K)} + T_{T_{\text{στ}}(K)} = 0 \quad (1)$$

Όμως $T_{w(K)} = T_{N(K)} = 0$ αφού οι φορείς των \vec{w} και \vec{N} διέρχονται από το σημείο K .

Επομένως η σχέση (1) γίνεται: $T_{F(K)} + T_{T_{\text{στ}}(K)} = 0$ ή

$$F \cdot R - T_{\text{στ}} \cdot R = 0 \text{ ή } F = T_{\text{στ}} \quad (2) \text{ και}$$

$$\Sigma F_x = 0 \text{ ή } F + T_{\text{στ}} - w_x = 0$$

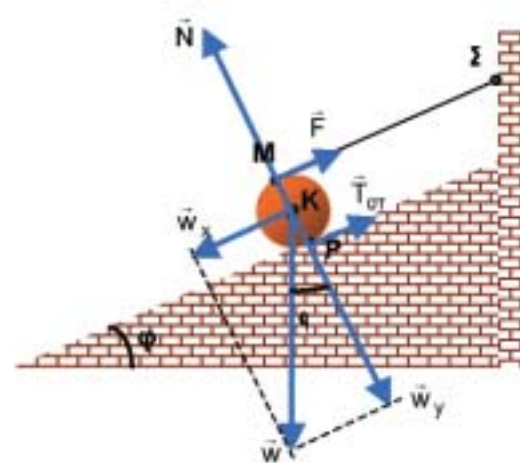
Η παραπάνω σχέση με τη βοήθεια της σχέσης (2) γίνεται: $2F = w_x$ ή $2F = mg \cdot \eta\mu\varphi$ ή $F = \frac{mg \cdot \eta\mu\varphi}{2}$ ή

$$F = 1,5\text{N}.$$

Ακόμα για το μέτρο της $\vec{T}_{\text{στ}}$ παίρνουμε: $T_{\text{στ}} = F = \frac{mg \cdot \eta\mu\varphi}{2} = 1,5\text{N}$.

ii. Όταν ο κύλινδρος αρχίσει να μετατοπίζεται στο κεκλιμένο επίπεδο θα εκτελεί σύνθετη κίνηση (περιστροφική κίνηση γύρω από τον άξονα του με γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}$ και μεταφορική με επιτάχυνση κέντρου μάζας $\vec{\alpha}_{\text{cm}}$). Οι δυνάμεις που ασκούνται τότε στον κύλινδρο είναι:

- το βάρος (\vec{w}),
- η κάθετη αντίδραση (\vec{N}),
- η τριβή ολίσθησης (\vec{T}) και
- η τάση του νήματος (\vec{F}).



 φροντιστήρια
ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ

ΚΕΝΤΡΙΚΑ ΓΡΑΦΕΙΑ FRANCHISE

ΠΕΙΡΑΙΑΣ

Σωτήρος & Αλκιβιάδου 132

Τηλ.: 210 4112507

e-mail: info@poukamisas.gr

ΑΙΓΑΛΕΩ: Θηβών 425 & Αδριανουπόλεως 10, Τηλ.: 210 5319805, **ΑΜΦΙΑΛΗ:** Κεφαλληνίας 8, Τηλ.: 210 4004200, **ΓΑΛΑΤΣΙ:** Ελ. Βενιζέλου 16, Τηλ.: 210 2224000, **ΓΛΥΦΑΔΑ:** Γαύναρη 44 & Πόντου 87, Τηλ.: 210 9647806, **ΔΡΑΠΕ- ΤΣΩΝΑ:** Ελ. Βενιζέλου 72, Τηλ.: 210 4622920, **ΚΑΛΛΙΘΕΑ:** Ελ. Βενιζέλου 188, Τηλ.: 210 9588891, **ΚΟΡΥΔΑΛΛΟΣ:** Δημητρακοπού- λου & Σπεσιών 38, Τηλ.: 210 4978027, **ΛΑΡΙ- ΣΑ:** Ρούσβεητ & Καποδιστρίου 1, Τηλ.: 2410 612660, **ΜΟΣΧΑΤΟ:** Χρυσοστόμου Σμύρνης 124, Τηλ.: 210 9401137, **ΝΕΑ ΣΜΥΡΝΗ:** Ελ. Βενιζέλου 233 & Μάρκου Μπότσαρη 30, Τηλ.: 210 9883771, **ΝΙΚΑΙΑ:** Απολλείας 214 & Δια- μοντιάδη 71, Τηλ.: 210 4975777, **ΠΕΙΡΑΙΑΣ:** Σωτήρος & Αλκιβιάδου 132, Τηλ.: 210 4112506, **ΠΕΡΑΜΑ:** Λ. Ειρήνης 177, Τηλ.: 210 4416454

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ



ΙΣΑΑΚ ΝΕΥΤΩΝ
(1642-1727)

Μια από τις σημαντικότερες μορφές των θετικών επιστημών που ανέδειξε η Αγγλία και η ανθρωπότητα. Σε ηλικία μόλις 23 ετών, απόφοιτος του Κέιμπριτζ ο Isaac Newton διατύπωσε τον περιώνυμο νόμο της βαρύτητας, που έβαλε τα θεμέλια της Κλασικής Φυσικής. Το 1687 δημοσίευσε το κορυφαίο έργο του, «Philosophiae naturalis principia mathematica», στο οποίο παραθέτει εκτός από το νόμο της βαρύτητας και τα τρία μνημειώδη αξιώματα της κίνησης. Το αυστηρά δομημένο αυτό έργο αποκαλύπτει τις επιρροές του από τη φιλοσοφία του Αριστοτέλη, τη γεωμετρία του Ευκλείδη και του Ντεκάρτ, τις παρατηρήσεις του Κέπλερ και του Γαλιλαίου για το φως και τους πλανήτες. Αφού θεμελιώνει τη Μηχανική εισάγει μια κοσμολογική άποψη για τη βαρύτητα (ο νόμος της παγκόσμιας έλξης) η οποία επιβλήθηκε στην επιστημονική κοινότητα, ώσπου την αναθεώρησαν οι μαθηματικές μελέτες των Καραθεοδωρή-Αϊνστάιν και εν τέλει η γενική θεωρία της σχετικότητας. Ιστορικής επιστημονικής σημασίας ήταν και οι μελέτες του περί του φωτός (η κατασκευή ηλιακών ρολογιών ήταν... παιδικό του χόμπι), καθώς και η συμβολή του στη θεμελίωση των μοντέρνων μαθηματικών και συγκεκριμένα του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, ανεξάρτητα από τη διαμάχη για την πατρότητα των σχετικών ανακαλύψεων με τον Γκότφριντ Βίλχελμ Λάιμπνιτς. Οι σχέσεις του με τον θεολόγο φιλόσοφο Τζον Λοκ περιόρισαν τις αναζητήσεις του Νεύτωνα για την υπόσταση του Σύμπαντος υπό το δόγμα της δημιουργίας του από θεϊκό χέρι, ενώ οι σύγχρονοι βιογράφοι του αποκαλύπτουν και έντονη ασχολία του με την αλχημεία. Μετά τα 70 ανέλαβε τη διοίκηση του βρετανικού νομισματοκοπείου, το οποίο είχε και αρμοδιότητα για τη δίωξη των παραχαρακτών, μέχρι την επιβολή της θανατικής ποινής, την οποία ο Νεύτων συνυπέγραφε πάντα...

Το ανώτερο σημείο M του κυλίνδρου κάθε χρονική στιγμή έχει μηδενική ταχύτητα αφού το νήμα είναι ακλόνητα στερεωμένο στο σημείο Σ. Έτσι ο κύλινδρος κατέρχεται περιστρεφόμενος δεξιόστροφα, ολισθαίνοντας πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

Τα μέτρα των δύο επιταχύνσεων συνδέονται με την σχέση: $a_{cm} = a_{γων} \cdot R$. (3)

Από τη συνθήκη ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα y'y παίρνουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \text{ ή } N - w_y = 0 \text{ ή } N = w_y \text{ ή } N = mg \cdot \sin\varphi \quad (4)$$

Από το 2^ο νόμο του Newton για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου στον άξονα x'x παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = ma_{cm} \text{ ή } w_x - F' - T = ma_{cm} \text{ ή}$$

$$F' = mg \cdot \eta\mu\varphi - T - ma_{cm} \quad (5)$$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης ως προς τον άξονα περιστροφής του κυλίνδρου έχουμε:

$$\Sigma T_{(K)} = I_{cm} \cdot a_{γων} \text{ ή } F' \cdot R - T \cdot R = I_{cm} \cdot a_{γων} \text{ ή}$$

$$F' \cdot R - T \cdot R = \frac{1}{2} mR^2 a_{γων} \text{ ή } F' - T = \frac{1}{2} mR a_{γων} \text{ ή μέσω}$$

$$\text{της σχέσης (3) } F' - T = \frac{1}{2} ma_{cm} \quad (6)$$

$$\text{Η σχέση (6) με τη βοήθεια της σχέσης (5) γίνεται: } mg \cdot \eta\mu\varphi - T - ma_{cm} - T = \frac{1}{2} ma_{cm} \text{ ή } mg \cdot \eta\mu\varphi - 2T = \frac{3}{2} ma_{cm} \text{ ή}$$

$$a_{cm} = \frac{2}{3m} (mg \cdot \eta\mu\varphi - 2T) \text{ ή } a_{cm} = \frac{2}{3m} (mg \cdot \eta\mu\varphi - 2\mu N) \text{ ή } a_{cm} = \frac{2}{3m} (mg \cdot \eta\mu\varphi - 2\mu mg \cdot \sin\varphi) \text{ ή}$$

$$a_{cm} = \frac{2g}{3} (\eta\mu\varphi - 2\mu \cdot \sin\varphi).$$

Για να μετατοπιστεί ο κύλινδρος προς τα κάτω πρέπει να ισχύει:

$$a_{cm} > 0 \text{ ή } \eta\mu\varphi - 2\mu \cdot \sin\varphi > 0 \text{ ή } \epsilon\phi\varphi > 2\mu \text{ ή } \epsilon\phi\varphi > 1 \text{ ή } \varphi > 45^\circ.$$

Β.ι. Αν η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου γίνει $\varphi = \theta = 53^\circ > 45^\circ$ ο κύλινδρος θα αρχίσει να μετατοπίζεται προς τη βάση του επιπέδου ολισθαίνοντας πάνω σε αυτό.

$$\text{Έτσι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου θα είναι: } a_{cm} = \frac{2g}{3} (\eta\mu\theta - 2\mu \cdot \sin\theta) \text{ ή } a_{cm} = \frac{4}{3} \text{ m/s}^2$$

Το μέτρο της τάσης του νήματος είναι:

$$F' = mg \cdot \eta\mu\theta - T - ma_{cm} \text{ ή } F' = mg \cdot \eta\mu\theta - \mu mg \cdot \sin\theta - ma_{cm} \text{ ή } F' = 2,2 \text{ N.}$$

ii. Η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου υπολογίζεται από τη σχέση: $\omega = a_{γων} t$ ή $\omega = \frac{a_{cm}}{R} t$ ή $\omega = 12 \text{ rad/s}$

Αν έως τη χρονική στιγμή $t = 0,9 \text{ s}$ ο κύλινδρος έχει μετατοπιστεί κατά x για τον αριθμό N των περιστροφών παίρνουμε:

$$N = \frac{x}{2\pi R} \text{ ή } N = \frac{\frac{1}{2} a_{cm} t^2}{2\pi R} \text{ ή } N = \frac{7,5}{\pi}$$

iii. Από τη σχέση της γωνιακής μετατόπισης του κυλίνδρου παίρνουμε:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2} a_{γων} t^2 \text{ ή } t = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta\varphi}{a_{γων}}} \text{ ή } t = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta\varphi \cdot R}{a_{cm}}} \text{ ή } t = 1,8 \text{ s}$$

Το κατώτερο σημείο του κυλίνδρου P έχει ταχύτητα:

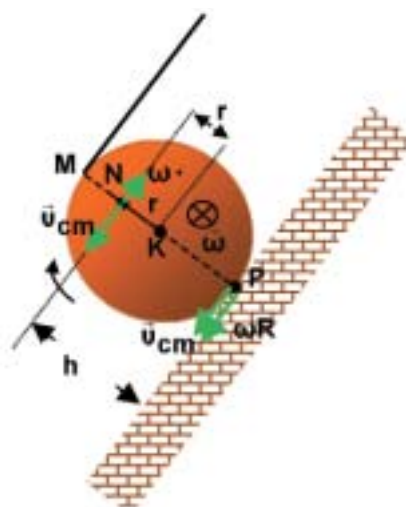
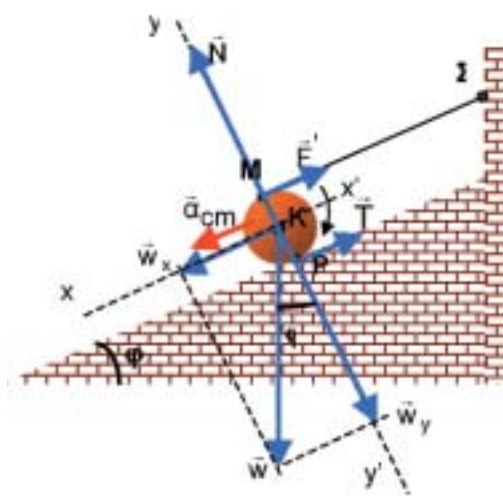
$$u_P = u_{cm} + \omega R \text{ ή } u_P = a_{cm} t + a_{γων} t R \text{ ή } u_P = a_{cm} t + a_{cm} t \text{ ή}$$

$$u_P = 2a_{cm} t \text{ ή } u_P = 4,8 \text{ m/s.}$$

Το σημείο N έχει ταχύτητα:

$$u_N = u_{cm} - \omega r \text{ ή } u_N = a_{cm} t - a_{γων} t \frac{R}{2} \text{ ή } u_P = a_{cm} t - \frac{a_{cm}}{2} t \text{ ή}$$

$$u_N = \frac{a_{cm}}{2} t \text{ ή } u_N = 1,2 \text{ m/s.}$$



φροντιστήρια
ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ