ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΤΑΣΟΣ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΝΟΥΛΗΣ
ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΑΓΓΕΛΟΠΟΥΛΟΣ
ΝΙΚΟΣ ΖΑΧΟΠΟΥΛΟΣ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΓΕΡΟΓΙΑΝΟΠΟΥΛΟΣ

“

Είναι $\int f'(x)dx = f(x)+c, c\in\mathbb{R}$ με f παραγωγίσιμη συνάρτηση σε διάστημα Δ, ενώ ($\int f(x)dx)' = f(x)$ όπου f ορισμένη σε διάστημα Δ.

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ - ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Θέμα 1°

Έστω συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $f'(1)=\frac{1}{2}$ και $f'(x)=\frac{5}{2}\cdot\frac{e^{f(x)}}{4+e^{f(x)}}$, για κάθε $x\in[1,+\infty)$.

i) Να υπολογίσετε την τιμή $f(1)$ και να βρείτε τις ρίζες της $f(x) = 0$ καθώς και το πρόσημο των τιμών της f.

ii) Να δείξετε ότι ισχύει $4e^{-f(x)}-f(x)=\frac{13-5x}{2}$, για κάθε $x\in[1,+\infty)$ και να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

iii) Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2f(x)+6\eta\mu x - x}{2xf(x)-5x^2+8x^2\eta\mu\frac{1}{x}}$.

Λύση

i) Στην $f'(x)=\frac{5}{2}\cdot\frac{e^{f(x)}}{4+e^{f(x)}}$ θέτουμε $x = 1$ και έχουμε:

$$f'(1)=\frac{5}{2}\cdot\frac{e^{f(1)}}{4+e^{f(1)}} \Leftrightarrow 8f'(1)+2e^{f(1)}f'(1)=5e^{f(1)} \overset{f'(1)=\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} 4+e^{f(1)}=5e^{f(1)} \Leftrightarrow f(1)=0,$$ άρα $x = 1$ ρίζα της $f(x) = 0$.

Είναι $f'(x)=\frac{5}{2}\cdot\frac{e^{f(x)}}{4+e^{f(x)}}>0$ για κάθε $x\geq 1$ και f συνεχής στο $[1, +\infty)$,άρα f γν.αύξουσα και επομένως η ρίζα $x = 1$ είναι μοναδική. Έτσι για κάθε $x > 1$ έχουμε $f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$ στο $(1, +\infty)$ ενώ $f(1) = 0$.

ii) Για $x\geq 1$ έχουμε $f'(x)=\frac{5}{2}\cdot\frac{e^{f(x)}}{4+e^{f(x)}} \Leftrightarrow -8f'(x)-2f'(x)e^{f(x)}=-5e^{f(x)} \Leftrightarrow -8f'(x)e^{-f(x)}-2f'(x)=-5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(8e^{-f(x)}-2f(x)\right)'=(-5x)' \text{ άρα } \int\left(8e^{-f(x)}-2f(x)\right)'dx=\int(-5x)'dx \Leftrightarrow 8e^{-f(x)}-2f(x)+c_1=-5x+c_2 \ (1),$$

με $c_1, c_2\in\mathbb{R}$. Στην (1) θέτουμε $c_2-c_1=c$ και έχουμε: $8e^{-f(x)}-2f(x)=-5x+c$, $c\in\mathbb{R}$ (2).

Όμως $f(1) = 0$, επομένως η (2) για $x = 1$ γίνεται $8e^{-f(1)}-2f(1)=-5+c \Leftrightarrow 8=c-5 \Leftrightarrow c=13$.

Άρα για κάθε $x\geq 1$ ισχύει $8e^{-f(x)}-2f(x)=13-5x \Leftrightarrow 4e^{-f(x)}-f(x)=\frac{13-5x}{2}$.

Για $x\geq 1$ ισχύει $f'(x)=\frac{5}{2}\cdot\frac{e^{f(x)}}{4+e^{f(x)}}$ επομένως η f' είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[1, +\infty)$ $\left(e^{f(x)}\right.$ παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f(x)$ και $\left.e^x\right)$.

Συνεπώς για $x\geq 1$ έχουμε: $$f''(x)=\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{e^{f(x)}}{4+e^{f(x)}}\right)'=\frac{5}{2}\cdot\frac{e^{f(x)}f'(x)\left(4+e^{f(x)}\right)-e^{f(x)}e^{f(x)}f'(x)}{\left(4+e^{f(x)}\right)^2}=\frac{5}{2}\cdot\frac{4e^{f(x)}f'(x)}{\left(4+e^{f(x)}\right)^2}>0$$

(αφού από i) ερώτημα $f'(x)>0$). Έτσι η συνεχής συνάρτηση f στο $[1, +\infty)$ είναι κυρτή.

iii) Από ii) ερώτημα είναι $4e^{-f(x)}-f(x)=\frac{13-5x}{2}$, για $x\geq 1$, άρα $f(x)-\left(\frac{5}{2}x-\frac{13}{2}\right)=4e^{-f(x)}$ και επομένως

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{5}{2}x-\frac{13}{2}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}4e^{-f(x)}=0,$$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-f(x)}=0$.

Έτσι η ευθεία $y=\frac{5}{2}x-\frac{13}{2}$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Έχουμε $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2f(x)+6\eta\mu x-x}{2xf(x)-5x^2+8x^2\eta\mu\frac{1}{x}}\overset{x>1}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}+3\frac{\eta\mu x}{x}-\frac{1}{2}}{\left(f(x)-\frac{5}{2}x\right)+4x\eta\mu\frac{1}{x}}=\frac{\frac{5}{2}+3\cdot 0-\frac{1}{2}}{-\frac{13}{2}+4\cdot 1}=-\frac{4}{5},$$ αφού

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{5}{2}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{5}{2}x\right)=-\frac{13}{2}$ επειδή η $y=\frac{5}{2}x-\frac{13}{2}$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$, επειδή $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|\leq\frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x}\leq\frac{\eta\mu x}{x}\leq\frac{1}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ (κριτήριο παρεμβολής).

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot ημ\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{ημu}{u}=1$, με $\frac{1}{x}=u$ και $x\to+\infty \Leftrightarrow u\to 0$.

Θέμα 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ell n\left(3x-\sqrt{9x^2-16}\right)$.

Α. Να βρείτε:

i) Το πεδίο ορισμού A της f.

ii) Την παράγωγο f' της f για $x>\frac{4}{3}$.

iii) Την ασύμπτωτη της C_g της $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ στο $+\infty$.

Β. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $K=\int\frac{1}{\sqrt{9x^2-16}}dx$, ii) $\Lambda=\int\sqrt{9x^2-16}\,dx$.

Λύση

Α. i) Πρέπει $9x^2-16\geq 0$ και $3x-\sqrt{9x^2-16}>0$.

Είναι $9x^2-16\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq\frac{16}{9}$ άρα $x\in\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right]\cup\left[\frac{4}{3},+\infty\right)$ ενώ $3x-\sqrt{9x^2-16}>0 \Leftrightarrow 3x>\sqrt{9x^2-16}$.

- Για $x<0$ η $3x>\sqrt{9x^2-16}$ είναι αδύνατη.
- Για $x>0$ έχουμε $9x^2>9x^2-16$, που ισχύει. Επομένως $A=\left[\frac{4}{3},+\infty\right)$.

ii) Για $x>\frac{4}{3}$, $f'(x)=\frac{1}{3x-\sqrt{9x^2-16}}\cdot\left(3-\frac{18x}{2\sqrt{9x^2-16}}\right) \Leftrightarrow f'(x)=\frac{3}{3x-\sqrt{9x^2-16}}\cdot\left(\frac{\sqrt{9x^2-16}-3x}{\sqrt{9x^2-16}}\right)$,

οπότε $f'(x)=-\frac{3}{\sqrt{9x^2-16}}$, $x>\frac{4}{3}$.

iii) Για $x>\frac{4}{3}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ell n\left(3x-\sqrt{9x^2-16}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ell n\frac{16}{3x+\sqrt{9x^2-16}}=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{16}{3x+\sqrt{9x^2-16}}=0$,

με $\frac{16}{3x+\sqrt{9x^2-16}}>0$ για κάθε $x>\alpha$ όπου $\alpha\in\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$.

Έτσι $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x'}\overset{A ii)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{\sqrt{9x^2-16}}\right)=0$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2-16}=+\infty$.

Άρα η $y=0$ (ημιάξονας Ox) είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

Β. i) Από ερώτημα Α ii) έχουμε $f'(x)=-\frac{3}{\sqrt{9x^2-16}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{9x^2-16}}=-\frac{1}{3}f'(x)$, άρα για $x>\frac{4}{3}$ έχουμε:

$$K=\int\frac{1}{\sqrt{9x^2-16}}dx=\int-\frac{1}{3}f'(x)dx=-\frac{1}{3}\int f'(x)dx=-\frac{1}{3}f(x)+c_1=-\frac{\ell n\left(3x-\sqrt{9x^2-16}\right)}{3}+c_1,\ c_1\in\mathbb{R}.$$

ii) $\Lambda=\int\sqrt{9x^2-16}\,dx=\int x'\sqrt{9x^2-16}\,dx=x\sqrt{9x^2-16}-\int x\frac{18x}{2\sqrt{9x^2-16}}dx=$

$=x\sqrt{9x^2-16}-\int\frac{9x^2}{\sqrt{9x^2-16}}dx=x\sqrt{9x^2-16}-\int\frac{9x^2-16+16}{\sqrt{9x^2-16}}dx=$

$=x\sqrt{9x^2-16}-\int\frac{9x^2-16}{\sqrt{9x^2-16}}dx-16\int\frac{1}{\sqrt{9x^2-16}}dx=x\sqrt{9x^2-16}-\int\sqrt{9x^2-16}dx-16K=$

$=x\sqrt{9x^2-16}-\Lambda-16K$. Συνεπώς:

$\Lambda=x\sqrt{9x^2-16}-\Lambda-16K \Leftrightarrow 2\Lambda=x\sqrt{9x^2-16}-16K \Leftrightarrow \Lambda=\frac{x}{2}\sqrt{9x^2-16}+\frac{8}{3}\ell n\left(3x-\sqrt{9x^2-16}\right)+c_2$,

με $c_2=-8c_1$.

ΜΠΡΟΥΚ ΤΕΪΛΟΡ (1685-1731)

Άγγλος μαθηματικός, μέλος της Βασιλικής Ακαδημίας του Λονδίνου από το 1712, οπότε βρήκε τον γενικό τύπο για την ανάλυση συναρτήσεων σε εκθετικές σειρές (σειρά Τέιλορ). Τη σχετική εργασία ο Τέιλορ τη δημοσίευσε το 1716 και η «σειρά Τέιλορ» απέβη από τότε ισχυρό όπλο για τη μελέτη των συναρτήσεων και για προσεγγιστικούς υπολογισμούς (η 3η σειρά μάλιστα αποτελεί γενίκευση στην περίπτωση κλασματικών και αρνητικών εκθετών του τύπου του διώνυμου του Νεύτωνα). Μαζί με την εργασία εκείνη ο «μοντέρνος» για την εποχή του μαθηματικός εξέθεσε την αρχή στη μαθηματική μελέτη του προβλήματος της ταλάντωσης χορδής. Στον Τέιλορ ανήκει και η επεξεργασία της θεωρίας των πεπερασμένων διαφορών. Είναι επίσης συγγραφέας των εργασιών για την προοπτική, για τα κέντρα ταλάντωσης, για την τροχιά των βλημάτων, για την αλληλεπίδραση των μαγνητών, για τα τριχοειδή φαινόμενα.