ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ

Αν $\overline{x}$ η μέση τιμή και $s$ η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ (ν>1) μιας μεταβλητής **X,** οι οποίες ακολουθούν (περίπου) την κανονική κατανομή, τότε: η πιθανότητα του ενδεχομένου: **«** η τυχαίως επιλεγόμενη παρατήρηση $t_i$, i=1,2,...,ν, να ανήκει στο διάστημα $\left(\overline{x}-2s, \overline{x}+s\right)$**»** είναι:

$$68\% + \frac{95\% - 68\%}{2} = 68\% + 13{,}5\% = 81{,}5\%$$

## ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

**Θέμα 1°**

Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:
$g(x) = \ln(x^2+1) + f^2(x+1)$, $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, f(0) = 0 και η ευθεία με εξίσωση y = – 8x + 4, εφάπτεται στη καμπύλη της g στο (0, g(0))

α. Να δείξετε ότι η ευθεία ε με εξίσωση y = –2 x + 4 εφάπτεται στη καμπύλη της f στο σημείο της με τετμημένη $x_o = 1$

β. Αν τα σημεία $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, …, $A_{20}(x_{20}, y_{20})$ ανήκουν στην ευθεία ε και ισχύουν $\sum_{i=1}^{20} x_i = 40$, $\sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 720$, να βρείτε την τυπική απόκλιση s > 0 των τετμημένων των παραπάνω σημείων.

γ. Αν επιπλέον οι τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ ακολουθούν (περίπου) την κανονική κατανομή και επιλέξουμε τυχαίως μια από αυτές, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
Α: «Η τιμή που επιλέξαμε είναι τιμή του διαστήματος (–4 , 5)»
Β: «Η τιμή που επιλέξαμε είναι μικρότερη του –1 ή μεγαλύτερη του 8»

**Λύση**

α. Οι συναρτήσεις:
$\ln(x^2+1)$, $f^2(x+1)$, είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε η g είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = \left[\ln(x^2+1) + f^2(x+1)\right]' =$

$\left[\ln(x^2+1)\right]' + \left[f^2(x+1)\right]' = \dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1} + 2f(x+1)\left[f(x+1)\right]'$, άρα $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} + 2f(x+1)f'(x+1)$, (1)

Η ευθεία y = – 8x + 4 είναι η εφαπτομένη στη καμπύλη της g στο (0, g(0)), τότε:

g(0) = – 8·0 + 4 = 4 και $g'(0) = -8$, άρα αν θέσουμε στην (1) όπου x = 0 έχουμε: $g'(0) = \dfrac{2\cdot 0}{0^2+1} + 2f(1)f'(1)$

$\overset{g'(0)=-8}{\Leftrightarrow} -8 = 2f(1)f'(1) \Leftrightarrow f(1)f'(1) = -4$, (2). Ακόμη $g(x) = \ln(x^2+1) + f^2(x+1)$, που για x = 0 γίνεται:

$g(0) = \ln 1 + f^2(1) \overset{g(0)=4}{\Leftrightarrow} 4 = f^2(1)$, άρα $f(1) = 2$ (αφού $f(x) \geq 0$). Συνεπώς από (2): $f'(1) = -2$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε στην καμπύλη της f στο σημείο της Κ(1,2) είναι της μορφής y = λx + μ

με $\lambda = f'(1) = -2$. Επομένως (ε): y = –2x + μ με το Κ να ανήκει στην ε, οπότε

f(1) = – 2 + μ ⇔ 2 = –2 + μ ⇔ μ = 4

Άρα η ευθεία ε με εξίσωση y = –2 x + 4 εφάπτεται στη καμπύλη της f στο σημείο Κ(1,2)

β. Τα σημεία $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ ανήκουν στην ευθεία ε επομένως ισχύει: $y_i = -2x_i + 4 \Leftrightarrow$

$y_i = -2(x_i - 2)$, (3), $i = 1, 2, \ldots, 20$. Είναι $\sum_{i=1}^{20} x_i = 40 \Leftrightarrow \overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = \dfrac{40}{20} = 2$, άρα η μέση τιμή των $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$

είναι $\overline{x} = 2$. Η διακύμανση $s^2$ των $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ δίνεται από τον τύπο $s^2 = \dfrac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \overline{x})^2$, άρα

$$\sum_{i=1}^{20}(x_i-2)^2 = 20s^2 \Leftrightarrow 4\sum_{i=1}^{20}(x_i-2)^2 = 80s^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{20}4(x_i-2)^2 = 80s^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{20}\left[-2(x_i-2)\right]^2 = 80s^2$$

$$\overset{(3)}{\Leftrightarrow} \sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 80s^2 \overset{\text{υποθ.}}{\Leftrightarrow} 80s^2 = 720 \Leftrightarrow s^2 = 9 \overset{s>0}{\Leftrightarrow} s = 3$$

γ. Η κατανομή των $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ είναι (περίπου) κανονική με $\overline{x} = 2$ και s = 3, άρα:
$\overline{x} - 3s = -7$, $\overline{x} - 2s = -4$, $\overline{x} - s = -1$, $\overline{x} + s = 5$, $\overline{x} + 2s = 8$, $\overline{x} + 3s = 11$

Το ποσοστό των τιμών που βρίσκονται στο διάστημα (–4 , 5) είναι: $68\% + \dfrac{95\% - 68\%}{2} = 68\% + 13{,}5\% = 81{,}5\%$

και επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι P(A) = 81,5%

Το ποσοστό των τιμών που είναι μικρότερες του –1 είναι $50\% - \dfrac{68\%}{2} = 50\% - 34\% = 16\%$,

ενώ το ποσοστό αυτών που είναι μεγαλύτερες του 8 είναι $50\% - \dfrac{95\%}{2} = 50\% - 47{,}5\% = 2{,}5\%$

Άρα, το συνολικό ποσοστό των τιμών που είναι μικρότερες του –1 ή μεγαλύτερες του 8 είναι:

16% + 2,5% = 18,5% και επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι P(B)=18,5%

**Θέμα 2ο**

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία $f'(x)=2x^2+(\beta-4\alpha)x-2\alpha\beta$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

με $\alpha\in A=\left\{\alpha\in\mathbb{N}\mid(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha^2-5\alpha+6)=0\right\}$ και $\beta\in B=\left\{\beta\in\mathbb{N}\mid 0\le\beta\le\ell\right.$, όπου $\left.\ell=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-2x}{\sqrt{x}-1}\right\}$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις τετμημένες των τοπικών ακροτάτων της.

β. Να βρείτε την τετμημένη x του σημείου $M(x,\ f(x))$ της καμπύλης της f στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης λ, καθώς και την τιμή του λ, ως συνάρτηση των α, β

γ. Αν επιλέξουμε τυχαίως μια τιμή $\alpha\in A$ και στη συνέχεια επίσης τυχαίως μια τιμή $\beta\in B$, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ: «$\lambda=-8$»

**Λύση**

α. Θέτουμε $f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ 2x^2+(\beta-4\alpha)x-2\alpha\beta=0\ \Leftrightarrow\ 2x^2+\beta x-4\alpha x-2\alpha\beta=0\ \Leftrightarrow\ x(2x+\beta)-2\alpha(2x+\beta)=0\Leftrightarrow$

$(2x+\beta)(x-2\alpha)=0$, οπότε $x=-\dfrac{\beta}{2}$ ή $x=2\alpha$

Όμως, $(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha^2-5\alpha+6)=0\Leftrightarrow\alpha=1$ ή $\alpha=-1$ (απορρίπτεται διότι $\alpha\in\mathbb{N}$) ή $\alpha=3$ ή $\alpha=2$,

άρα $\alpha\in A=\{1,\ 2,\ 3\}$, συνεπώς $2\alpha\in\{2,4,6\}$

Είναι $\ell=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-2x}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\left[2x(\sqrt{x}+1)\right]=4$,

άρα $\beta\in B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, συνεπώς $-\dfrac{\beta}{2}\in\left\{-2,-\dfrac{3}{2},-1,-\dfrac{1}{2},0\right\}$, δηλαδή $-\dfrac{\beta}{2}<2\alpha$ και επομένως ο πίνακας μεταβολών της f και προσήμου της $f'$, είναι ο ακόλουθος:

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{\beta}{2}$ | $2\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | – | + | |
| $f(x)$ | ↗ | ↘ | ↗ | |

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-\dfrac{\beta}{2}\right]$, $[2\alpha,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\dfrac{\beta}{2},2\alpha\right]$. Ακόμη η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=-\dfrac{\beta}{2}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2=2\alpha$

β. Ο συντελεστής διεύθυνσης της καμπύλης της f(x) σε σημείο $M(x,\ f(x))$ είναι

$f'(x)=2x^2+(\beta-4\alpha)x-2\alpha\beta$, οπότε για να βρούμε την ελάχιστη τιμή της $f'(x)$ παραγωγίζουμε την $f'(x)$ και έχουμε: $f''(x)=4x+\beta-4\alpha$

Είναι $f''(x)=0\ \Leftrightarrow\ 4x+\beta-4\alpha=0\ \Leftrightarrow\ x=\dfrac{4\alpha-\beta}{4}$ και $f''(x)>0\ \Leftrightarrow\ x>\dfrac{4\alpha-\beta}{4}$, οπότε η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,\dfrac{4\alpha-\beta}{4}\right]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\dfrac{4\alpha-\beta}{4},+\infty\right)$ και παρουσιάζει επομένως ελάχιστη τιμή στο $x=\dfrac{4\alpha-\beta}{4}$, την $\lambda=f'\left(\dfrac{4\alpha-\beta}{4}\right)=2\dfrac{(4\alpha-\beta)^2}{16}+(\beta-4\alpha)\dfrac{4\alpha-\beta}{4}-2\alpha\beta=$

$\dfrac{(4\alpha-\beta)^2}{8}-\dfrac{(4\alpha-\beta)^2}{4}-2\alpha\beta=-\dfrac{(4\alpha+\beta)^2}{8}$

γ. Είναι $\lambda=-8$ και

από β ερώτ. έχουμε $\lambda=-\dfrac{(4\alpha+\beta)^2}{8}$, οπότε $(4\alpha+\beta)^2=64\ \Leftrightarrow\ 4\alpha+\beta=8$ (αφού από α ερώτ. ισχύει $4\alpha>0$ και $\beta>0$). Συνεπώς $\beta=8-4\alpha$, (1), με $\beta=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ και $\alpha=1,\ 2,\ 3$

- Για $\alpha=1$ έχουμε από (1): $\beta=8-4=4$, δεκτή.
- Για $\alpha=2$ έχουμε από (1): $\beta=0$, δεκτή.
- Για $\alpha=3$ έχουμε από (1): $\beta=8-12=-4$, απορρίπτεται.

Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από τα ζεύγη (α, β), δηλαδή από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα με $\alpha\in A$, $\beta\in B$, άρα $N(\Omega)=3\cdot5=15$ και $N(\Gamma)=2$ (όπως προκύπτει από την προηγούμενη διερεύνηση).

Επομένως, $P(\Gamma)=\dfrac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\dfrac{2}{15}$

## ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

### ΝΙΚΟΛΑΪ ΙΒΑΝΟΒΙΤΣ ΛΟΜΠΑΤΣΕΦΣΚΙ (1792-1856)

Ρώσος μαθηματικός, που με την ανατροπή της ευκλείδειας γεωμετρίας συνέβαλε καθοριστικά στην εξέλιξη των Μαθηματικών και κατατάχθηκε στη χωρία των κορυφαίων επιστημόνων όλων των εποχών. Ο Λομπατσέφσκι από τα 14 βρέθηκε στα έδρανα του Πανεπιστημίου του Καζάν και από τα 22 στην έδρα του καθηγητή Μαθηματικών στο ίδιο πανεπιστήμιο. Το 1823 κατέθεσε στην Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης τη δική του θεωρία για τη Γεωμετρία που ανέτρεπε την κυρίαρχη επί 2.000 χρόνια ευκλείδεια αντίληψη και εισήγαγε τη γνωστή σήμερα ως «υπερβολική γεωμετρία». Στην όλη γεωμετρική θεωρία του Λομπατσέφσκι ενυπάρχει έμμεσα η έννοια της καμπυλότητας του χώρου, γι αυτό ο Ρώσος μαθηματικός μπορεί να θεωρηθεί ως πρωτοπόρος στη μη ευκλείδεια κοσμολογία αλλά και ως πρόδρομος της θεωρίας της σχετικότητας. Παρόμοια αντίληψη διατύπωσε τότε και ο Ούγγρος μαθηματικός Γιάννος Μπόλιαϊ. Μόνο ο Γκάους πρόσεξε στην αρχή την εργασία του Λομπατσέφσκι. Επί δεκαετίες απορρίπτονταν μέχρι που και ο Ρίμαν «πάτησε» πάνω της. Αργότερα όταν το πρώτο πόνημα του Ρώσου «Επί των αρχών της γεωμετρίας» μεταφράστηκε στα γερμανικά, οι πάντες υποκλίθηκαν... Ακολούθησαν μεταφράσεις και στα υπόλοιπα έργα του και ο Λομπατσέφκσι δικαιώθηκε – όπως πολλοί – μετά θάνατον... Συνεισφορά μεγάλη είχε και στην Άλγεβρα με τις δημοσιευμένες συμπληρώσεις που έκανε στο έργο του Γκάους για τις διωνυμικές εξισώσεις.