ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΒΛΑΧΟΣ
ΕΥΘΑΛΙΑ ΠΕΡΙΣΤΕΡΗ

- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε
$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$
- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και για κάθε x στο εσωτερικό του Δ ισχύει $f'(x) = g'(x)$, τότε $f(x) = g(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ, ROLLE-ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ Θ.Μ.Τ.

Θέμα 1°

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,\ e]$ τέτοια ώστε $e^2 f(1) = f(e) - 1,\ f(1) \neq 0$ και $xf'(x) \neq x^2 f''(x) + 2$ για κάθε $x \in (1,\ e)$

Να δείξετε ότι:

α. Η εξίσωση $2f(x) - xf'(x) = 2\ln x - 1,\ (1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_o στο διάστημα $(1,\ e)$

β. Η ρίζα x_o της εξίσωσης (1) είναι μοναδική.

γ. Αν $f'(1) = \dfrac{1 - 2\ln x_0}{x_0}$, τότε υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $|f''(\xi)| < \dfrac{2|f(x_0)|}{x_0 - 1}$

Λύση

α. $2f(x) - xf'(x) = 2\ln x - 1 \Leftrightarrow 1 - xf'(x) - 2\ln x + 2f(x) = 0 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} x - x^2 f'(x) - 2x\ln x + 2xf(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{x - x^2 f'(x) - 2x\ln x + 2xf(x)}{x^4} = 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{x} - f'(x)\right)x^2 - 2x(\ln x - f(x))}{x^4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\ln x - f(x)}{x^2}\right)' = 0$$

θεωρώντας τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{\ln x - f(x)}{x^2}$, $x \in [1,\ e]$, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $g'(x) = 0,\ x \in (1,\ e)$

Η g είναι συνεχής στο $[1,\ e]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,\ e)$, αφού,

η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,\ e]$. Ακόμη $g(1) = -f(1)$ και $g(e) = \dfrac{1 - f(e)}{e^2}$

Όμως: $e^2 f(1) = f(e) - 1 \Leftrightarrow \dfrac{1 - f(e)}{e^2} = -f(1)$, άρα $g(1) = g(e)$

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (1,\ e)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_o) = 0$

Δηλαδή η εξίσωση $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f(x) - xf'(x) = 2\ln x - 1$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_o \in (1,\ e)$

β. Έστω ότι η εξίσωση (1), έχει και δεύτερη ρίζα $x_1 \neq x_o$ με $x_1 \in (1,\ e)$ και $x_1 > x_o$ (ομοίως αν $x_1 < x_0$)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2f(x) - xf'(x) - 2\ln x + 1,\ x \in [x_0,\ x_1]$

Η h είναι συνεχής στο $[x_0,\ x_1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_0,\ x_1)$

αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,\ e]$ και $[x_0,\ x_1] \subset [1,\ e]$

Ακόμη $h(x_o) = h(x_1) = 0$, άρα σύμφωνα με το θεώρημα Rolle

υπάρχει $\rho \in (x_0,\ x_1) \subset (1,\ e)$ τέτοιο, ώστε $h'(\rho) = 0$

Όμως, $h'(x) = 2f'(x) - f'(x) - xf''(x) - \dfrac{2}{x} = f'(x) - xf''(x) - \dfrac{2}{x}$, άρα $f'(\rho) - \rho f''(\rho) - \dfrac{2}{\rho} = 0 \Leftrightarrow$

$\rho f'(\rho) - \rho^2 f''(\rho) = 2 \Leftrightarrow \rho f'(\rho) = \rho^2 f''(\rho) + 2$, που είναι άτοπο αφού $xf'(x) \neq x^2 f''(x) + 2$ για κάθε $x \in (1,\ e)$

Επομένως η ρίζα $x_o \in (1,\ e)$ είναι μοναδική.

γ. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[1,\ x_o] \subset [1,\ e]$, αφού, η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,\ e]$

Επομένως, σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,\ x_o) \subset \mathbb{R}$ τέτοιο,

ώστε $f''(\xi) = \dfrac{f'(x_0) - f'(1)}{x_0 - 1}$, (2)

Όμως από α. έχουμε $2f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 2\ln x_0 - 1$, άρα $f'(x_0) = \dfrac{2f(x_0) - 2\ln x_0 + 1}{x_0}$, (3)

Συνεπώς, από (2),(3) παίρνουμε: $f''(\xi) = \dfrac{\dfrac{2f(x_0) - 2\ln x_0 + 1}{x_0} - \dfrac{1 - 2\ln x_0}{x_0}}{x_0 - 1} \Leftrightarrow f''(\xi) = \dfrac{2f(x_0)}{x_0(x_0 - 1)}$

Οπότε $|f''(\xi)| = \left|\dfrac{2f(x_0)}{x_0(x_0 - 1)}\right| < \dfrac{2|f(x_0)|}{x_0 - 1}$, αφού $x_0 > 1$ άρα και $x_0(x_0 - 1) > 0$

Θέμα 2°

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ τέτοια, ώστε $8f'(x)=f^3(x)\eta\mu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(\pi)=2$

α. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x+2}},\ x\in\mathbb{R}$

β. Αν $g:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει $g'(x)=2\sqrt{g(x)}.f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

i. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\le\sqrt{g(x+1)}-\sqrt{g(x)}\le 2,\ x\in\mathbb{R}$

ii. Η εξίσωση $\sqrt{g(x)}-x+2=0$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

Λύση

α. $8f'(x)=f^3(x)\eta\mu x\overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}\dfrac{8f'(x)}{f^3(x)}=\eta\mu x\Leftrightarrow 4\left(-\dfrac{2f'(x)f(x)}{f^4(x)}\right)=-\eta\mu x\Leftrightarrow 4\left(\dfrac{1}{f^2(x)}\right)'=(\sigma\upsilon\nu x)'\Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{4}{f^2(x)}\right)'=(\sigma\upsilon\nu x)'$, (1). Οι συναρτήσεις $\dfrac{4}{f^2(x)}$, συνx είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ οπότε από την (1) έχουμε:

$\dfrac{4}{f^2(x)}=\sigma\upsilon\nu x+c,\ c\in\mathbb{R}$ Όμως $f(\pi)=2$, άρα θα ισχύει $\dfrac{4}{f^2(\pi)}=-1+c\Leftrightarrow c=2$

Επομένως, $\dfrac{4}{f^2(x)}=\sigma\upsilon\nu x+2\Leftrightarrow f^2(x)=\dfrac{4}{\sigma\upsilon\nu x+2},\ x\in\mathbb{R}$

Όμως, $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και f συνεχής ως παραγωγίσιμη.

Άρα $f(x)>0$ ή $f(x)<0$, δηλαδή $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x+2}}$ ή $f(x)=-\dfrac{2}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x+2}}$, που επειδή $f(\pi)=2>0$,

θα ισχύει $f(x)>0$. Συνεπώς $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x+2}},\ x\in\mathbb{R}$

β. i. $g'(x)=2\sqrt{g(x)}.f(x)\Leftrightarrow\dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}=f(x)\Leftrightarrow\left(\sqrt{g(x)}\right)'=f(x)$

Θεωρούμε $\sqrt{g(x)}=h(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $h'(x)=f(x)$, (2)

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[x,x+1]$, $x\in\mathbb{R}$

Έτσι σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την h στο $[x,x+1]$, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x,x+1)$

τέτοιο, ώστε $h'(\xi)=\dfrac{h(x+1)-h(x)}{x+1-x}=h(x+1)-h(x)$

Τότε, από (2): $f(\xi)=h(x+1)-h(x)\Leftrightarrow f(\xi)=\sqrt{g(x+1)}-\sqrt{g(x)}$

Όμως, από το ερώτημα α. είναι:

$f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x+2}}$ και $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1\Leftrightarrow 1\le\sigma\upsilon\nu x+2\le 3\Leftrightarrow\dfrac{4}{3}\le\dfrac{4}{\sigma\upsilon\nu x+2}\le 4\Leftrightarrow\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\le f(x)\le 2,$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, που για $x=\xi$ γίνεται $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\le f(\xi)\le 2$. Έτσι θα ισχύει $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\le\sqrt{g(x+1)}-\sqrt{g(x)}\le 2,\ x\in\mathbb{R}$

ii. Έστω ότι η εξίσωση $\sqrt{g(x)}-x+2=0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες τις $x_1,\ x_2$ με $x_1<x_2$ (ομοίως αν $x_1>x_2$)

Θεωρούμε $\sqrt{g(x)}-x+2=\varphi(x),\ x\in[x_1,x_2]$

Η φ είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2), αφού,

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο στο $[x_1,x_2]\subset\mathbb{R}$, με $\varphi'(x)=\dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}-1$, (3)

[οι συναρτήσεις $\sqrt{g(x)}$ (σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων), $-x+2$ είναι παραγωγίσιμες].

Ακόμη, $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την φ στο $[x_1,x_2]$

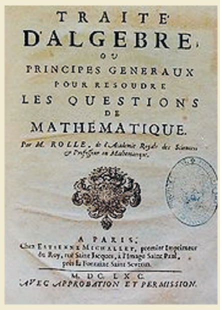
Επομένως, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(x_1,x_2)\subset\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$\varphi'(\rho)=0\overset{(3)}{\Leftrightarrow}\dfrac{g'(\rho)}{2\sqrt{g(\rho)}}-1=0\overset{\upsilon\pi o\theta.}{\Leftrightarrow}f(\rho)=1$, που είναι άτοπο, αφού $1<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\le f(x)\le 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Συνεπώς, η εξίσωση $\sqrt{g(x)}-x+2=0$ έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΜΙΣΕΛ ΡΟΛ (1652-1719)



Γάλλος μαθηματικός, που συγκαταλέγεται στους κορυφαίους μελετητές του απειροστικού και διαφορικού λογισμού. Γεννήθηκε στα περίχωρα του Αμπέρ, όπου κάνοντας δουλειές που απαιτούσαν μετρήσεις ανακάλυψε το ταλέντο του στην άλγεβρα και τη γεωμετρία. Από τα 23 του, οπότε βρέθηκε στο Παρίσι, άνοιξε δρόμους για την ανάπτυξη των κλίσεών του.

Μελέτησε καλά τις έως εκείνη την εποχή γνωστές αλγοριθμικές μεθόδους, καθώς και τις θεωρίες απειροστικού λογισμού και στα 1685 έγινε μέλος της Ακαδημίας Επιστημών του Παρισιού. Πάταγο, όμως, έκανε στα 1690 όταν δημοσίευσε το έργο «Πραγματεία περί της Άλγεβρας» («Traite d'algebre» γαλλιστί). Εκεί ανέπτυξε τη μέθοδο του διαχωρισμού των πραγματικών ριζών αλγεβρικών εξισώσεων, που βασίζεται στη μερική περίπτωση του λεγόμενου θεωρήματος του Rolle.

Από τις αρχές του 18ου αιώνα μέχρι το θάνατό του και με επίκεντρο πάντα τους παριζιάνικους επιστημονικούς κύκλους, ο Michel Rolle βρισκόταν διαρκώς σε μετωπική σύγκρουση με τους υποστηρικτές του απειροστικού λογισμού του Λάιμπνιτς, ενώ ταυτόχρονα δημοσίευε μελέτες για τις ακέραιες λύσεις απροσδιόριστων γραμμικών εξισώσεων με δυο αγνώστους.