ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΤΑΣΟΣ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΥΡΙΑΖΗΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ

«Αν οι τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ($\nu>1$) μιας μεταβλητής **X**, ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου: «η τυχαίως επιλεγόμενη τιμή x_i, $i=1,2,\ldots,\nu$, βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}+\kappa s, \bar{x}+(\kappa+1)s), \kappa=-3,-2,-1,0,1,2$» είναι: $2{,}35\%$, $13{,}5\%$, 34%, 34%, $13{,}5\%$, $2{,}35\%$ αντιστοίχως.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $g(x) = \ell n\left(f^2(x)+e^x\right)+f^3(2x+1)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $f(0) = 0$
- Η ευθεία με εξίσωση $y = -5x+1$, εφάπτεται στην καμπύλη της g στο $(0, g(0))$.

α) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = -x+2$ εφάπτεται στην καμπύλη της f στο σημείο της με τετμημένη $x_o = 1$.

β) Αν τα σημεία $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \ldots, A_{25}(x_{25}, y_{25})$ ανήκουν στην ευθεία (ε) και ισχύουν $\sum_{i=1}^{25} x_i = 50$, $\sum_{i=1}^{25} y_i^2 = 100$, να βρείτε την τυπική απόκλιση $s>0$ των τετμημένων των παραπάνω σημείων.

γ) Αν επιπλέον οι τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ ακολουθούν (περίπου) την κανονική κατανομή και επιλέξουμε στην τύχη μια από αυτές, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
Α: «Η τιμή που επιλέξαμε είναι τιμή του διαστήματος (0, 6)»
Β: «Η τιμή που επιλέξαμε είναι μικρότερη του 2 ή μεγαλύτερη του 6».

Λύση

α) Οι συναρτήσεις $\ell n\left(f^2(x)+e^x\right)$, $f^3(2x+1)$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οπότε η g είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g'(x) = \left[\ell n\left(f^2(x)+e^x\right)+f^3(2x+1)\right]' = \left[\ell n\left(f^2(x)+e^x\right)\right]' + \left[f^3(2x+1)\right]' =$$

$$= \frac{\left(f^2(x)+e^x\right)'}{f^2(x)+e^x} + 3f^2(2x+1)\left[f(2x+1)\right]' \quad \text{άρα } g'(x) = \frac{2f(x)f'(x)+e^x}{f^2(x)+e^x} + 6f^2(2x+1)f'(2x+1) \quad (1).$$

Αφού η ευθεία $y = -5x+1$ είναι η εφαπτομένη στην καμπύλη της g στο $(0, g(0))$ θα ισχύουν:
$g(0) = -5\cdot 0+1 = 1$ και $g'(0) = -5$, άρα αν στην (1) θέσουμε $x = 0$ παίρνουμε:

$$g'(0) = \frac{2f(0)f'(0)+1}{f^2(0)+1} + 6f^2(1)f'(1) \overset{\text{υποθ.}}{\Leftrightarrow} -5 = 1+6f^2(1)f'(1) \Leftrightarrow f^2(1)f'(1) = -1 \quad (2).$$

Ακόμη $g(x) = \ell n\left(f^2(x)+e^x\right)+f^3(2x+1)$ που για $x = 0$ γίνεται:

$$g(0) = \ell n\left(f^2(0)+1\right)+f^3(1) \overset{\text{υποθ.}}{\Leftrightarrow} 1 = \ell n(0+1)+f^3(1) \Leftrightarrow 1 = 0+f^3(1) \Leftrightarrow f^3(1) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 1,$$

άρα η (2) δίνει $f'(1) = -1$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στην καμπύλη της f στο σημείο της $M(1,1)$ έχει τη μορφή $y = \lambda x+\kappa$ με $\lambda = f'(1) = -1$.

Επομένως (ε): $y = -x+\kappa$ με το M να ανήκει στην (ε), οπότε $f(1) = -1+\kappa \Leftrightarrow 1 = -1+\kappa \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \kappa = 2$, τελικά (ε): $y = -x+2$.

β) Τα σημεία $A_1, A_2, \ldots, A_{25}$ ανήκουν στην ευθεία (ε) επομένως θα ισχύει $y_i = -x_i+2 \quad (3)$, $i = 1, 2, \ldots, 25$.

Είναι $\sum_{i=1}^{25} x_i = 50 \Leftrightarrow \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{25} x_i}{25} = \dfrac{50}{25} = 2$ άρα η μέση τιμή των $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ είναι $\bar{x} = 2$.

Η διακύμανση s^2 των $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ δίνεται από τον τύπο $s^2 = \dfrac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}(x_i-2)^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{25}(2-x_i)^2 = 25s^2 \Leftrightarrow$

$$\overset{(3)}{\Leftrightarrow} \sum_{i=1}^{25} y_i^2 = 25s^2 \overset{\text{υποθ.}}{\Leftrightarrow} 25s^2 = 100 \Leftrightarrow s^2 = 4 \overset{s>0}{\Leftrightarrow} s = 2.$$

γ) Η κατανομή $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ είναι κανονική με $\bar{x} = 2$ και $s = 2$ άρα

$$\bar{x}-3s = -4,\ \bar{x}-2s = -2,\ \bar{x}-s = 0,\ \bar{x}+s = 4,\ \bar{x}+2s = 6,\ \bar{x}+3s = 8.$$

Το ποσοστό των τιμών που βρίσκονται στο διάστημα (0, 6) είναι

$68\% + \dfrac{95\%-68\%}{2} = 68\%+13{,}5\% = 81{,}5\%$ και επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A) = 81{,}5\%$.

Το ποσοστό των τιμών που είναι μικρότερες του 2 είναι 50% ενώ το ποσοστό αυτών που είναι μεγαλύτερες του 6 είναι $50\% - \dfrac{95\%}{2} = 50\%-47{,}5\% = 2{,}5\%$.

Άρα το συνολικό ποσοστό των τιμών που είναι μικρότερες του 2 ή μεγαλύτερες του 6 είναι
$50\% + 2{,}5\% = 52{,}5\%$ και επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(B)=52{,}5\%$.

Θέμα 2°

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία $f'(x)=2x^2-(\alpha+2\beta)x+\alpha\beta$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με $\alpha\in A=\{1,2,3,4\}$ και $\beta\in B=\{3,4,5,6\}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις τετμημένες των τοπικών ακροτάτων της.

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή E του ρυθμού μεταβολής της f ως προς x συναρτήσει των α, β.

γ) Αν επιλέξουμε στην τύχη μια τιμή $\alpha\in A$ και στη συνέχεια επίσης στην τύχη μια τιμή $\beta\in B$, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ: «$E = -8$».

Λύση

α) Θέτουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-(\alpha+2\beta)x+\alpha\beta=0 \Leftrightarrow 2x^2-\alpha x-2\beta x+\alpha\beta=0 \Leftrightarrow 2x(x-\beta)-\alpha(x-\beta)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x-\alpha)(x-\beta)=0$, οπότε $x=\dfrac{\alpha}{2}$ ή $x=\beta$.

Όμως $\alpha\le 4 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{2}\le 2$ ενώ $\beta\ge 3$, άρα $\dfrac{\alpha}{2}<\beta$ και επομένως ο πίνακας μεταβολών της f και προσήμου της f' είναι ο ακόλουθος:

x	$-\infty$		$\frac{\alpha}{2}$		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,\dfrac{\alpha}{2}\right]$, $[\beta,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\dfrac{\alpha}{2},\beta\right]$. Ακόμη η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=\dfrac{\alpha}{2}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2=\beta$.

β) Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x είναι $f'(x)=2x^2-(\alpha+2\beta)x+\alpha\beta$, $x\in\mathbb{R}$, οπότε για να βρούμε την ελάχιστη τιμή της $f'(x)$ παραγωγίζουμε την $f'(x)$ και έχουμε: $f''(x)=4x-(\alpha+2\beta)$.

Είναι $f''(x)=0 \Leftrightarrow 4x-(\alpha+2\beta)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\alpha+2\beta}{4}$ και $f''(x)>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{\alpha+2\beta}{4}$, οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,\dfrac{\alpha+2\beta}{4}\right]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\dfrac{\alpha+2\beta}{4},+\infty\right)$ και παρουσιάζει επομένως ελάχιστη τιμή στο $x=\dfrac{\alpha+2\beta}{4}$ την $E=f'\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{4}\right)=2\dfrac{(\alpha+2\beta)^2}{16}-(\alpha+2\beta)\dfrac{\alpha+2\beta}{4}+\alpha\beta=\ldots=-\dfrac{(\alpha-2\beta)^2}{8}$.

γ) Είναι $E=-8$ και από β) $E=-\dfrac{(\alpha-2\beta)^2}{8}$, οπότε $(\alpha-2\beta)^2=64 \Leftrightarrow \alpha-2\beta=-8$ (αφού από α) ισχύει $\dfrac{\alpha}{2}<\beta \Leftrightarrow \alpha-2\beta<0$). Συνεπώς $\beta=\dfrac{\alpha}{2}+4$ (1), με $\beta = 3, 4, 5, 6$ και $\alpha = 1, 2,3\ 4$.

- Για $\alpha = 1$, έχουμε από (1): $\beta=\dfrac{1}{2}+4=\dfrac{9}{2}$, αδύνατο.
- Για $\alpha = 2$, έχουμε από (1): $\beta = 5$, δεκτό.
- Για $\alpha = 3$, έχουμε από (1): $\beta=\dfrac{3}{2}+4=\dfrac{11}{2}$, αδύνατο.
- Για $\alpha = 4$, έχουμε από (1): $\beta = 6$, δεκτό.

Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από τα ζεύγη (α, β) δηλαδή από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα με $\alpha\in A$, $\beta\in B$, άρα $N(\Omega) = 4\cdot 4 = 16$ και $N(\Gamma) = 2$ (όπως προκύπτει από την προηγούμενη διερεύνηση).

Συνεπώς $P(\Gamma)=\dfrac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\dfrac{2}{16}=\dfrac{1}{8}$ ή 0,125.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΜΠΟΝΑΒΕΝΤΟΥΡΑ ΚΑΒΑΛΙΕΡΙ (1598-1647)

Ιταλός μαθηματικός που κατατάσσεται στους πρωτοπόρους του απειροστικού λογισμού. Στα δεκαεπτά του προσχώρησε στο τάγμα των Ιησουιτών και στάλθηκε στην Πίζα για να σπουδάσει μαθηματικά. Από το 1629 έως το θάνατό του δίδαξε μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο της Μπολώνιας. Τη φήμη του οφείλει στο έργο του «Γεωμετρία των αδιαίρετων συνεχών» (Geometria Indivisibilibus Continuorum, 1635), όπου πραγματεύεται απλά θέματα του απειροστικού λογισμού με μία μέθοδο βασισμένη στην αντίληψή του για το «αδιαίρετο». Η μέθοδός του τον οδήγησε σε ορισμένα ορθά αποτελέσματα, αλλά οι βασικές παραδοχές του δεν ευσταθούν σήμερα και δέχθηκαν τις επικρίσεις των συγχρόνων του. Το έργο του αυτό, που αποτελείται από επτά βιβλία, παρακίνησε σημαντικό αριθμό μαθηματικών να εγκύψουν στη μελέτη προβλημάτων σχετικών με απειροστά. Ο ίδιος ασχολήθηκε και με άλλα μαθηματικά θέματα. Ειδικά, συντέλεσε στην διάδοση στην Ιταλία της θεωρίας των λογάριθμων και της εφαρμογής της σε αρκετά τριγωνομετρικά προβλήματα. Έχει επίσης συγγράψει μελέτες που αναφέρονται σε θέματα οπτικής, αστρονομίας και αστρολογίας.