ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΓΕΡΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ
ΝΙΚΟΣ ΚΟΚΟΛΗΣ

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ-ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1-1-ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Θέμα 1°

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x)-f(y)|\ge\kappa|x-y|$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και $\kappa\in\mathbb{R}_+^*$. Να δείξετε ότι:

i. Η f είναι $1-1$ στο $\mathbb{R}$.

ii. Η εξίσωση $f(f(x))=\lambda x$, με $|\lambda|<\kappa^2$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

Λύση

i. Για κάθε $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ υποθέτουμε ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Από την αρχική σχέση για $x=x_1$ και $y=x_2$ έχουμε: $|f(x_1)-f(x_2)|\ge\kappa|x_1-x_2|$.

Ισοδύναμα $0\ge\kappa|x_1-x_2| \overset{\kappa>0}{\Leftrightarrow} x_1=x_2$. Επομένως η f είναι $1-1$ στο $\mathbb{R}$.

ii. Έστω ότι η εξίσωση $f(f(x))=\lambda x$ έχει δύο ρίζες ρ_1,ρ_2 με $\rho_1\ne\rho_2$. Αντικαθιστώντας στην αρχική σχέση

$x=f(\rho_1)$, $y=f(\rho_2)$ παίρνουμε: $|f(f(\rho_1))-f(f(\rho_2))|\ge\kappa|f(\rho_1)-f(\rho_2)|\ge\kappa^2|\rho_1-\rho_2|$ (1).

Όμως $f(f(\rho_1))=\lambda\rho_1$ και $f(f(\rho_2))=\lambda\rho_2$ (2). Οπότε από (1) λόγω της (2) έχουμε:

$|\lambda||\rho_1-\rho_2|\ge\kappa^2|\rho_1-\rho_2| \Leftrightarrow (\kappa^2-|\lambda|)|\rho_1-\rho_2|\le 0 \overset{\kappa^2>|\lambda|}{\Leftrightarrow} \rho_1=\rho_2$, άτοπο.

Συνεπώς η εξίσωση $f(f(x))=\lambda x$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

Θέμα 2°

Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $f^3(x)+f(x)=2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1).

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(f(\lambda^2+\lambda-1))<1$.

Λύση

i. Για κάθε $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow 2x_1<2x_2 \overset{\text{υποθ.}}{\Leftrightarrow} f^3(x_1)+f(x_1)<f^3(x_2)+f(x_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (f^3(x_1)-f^3(x_2))+(f(x_1)-f(x_2))<0 \Leftrightarrow (f(x_1)-f(x_2))(f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+1)<0.$

Αλλά $f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+1>0$ αφού $f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)\ge 0$ επειδή $\Delta=-3f^2(x_2)\le 0$ (τριώνυμο ως προς $f(x_1)$).

Άρα $f(x_1)<f(x_2)$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Για $x=1$ η (1) γίνεται:

$f^3(1)+f(1)=2 \Leftrightarrow f^3(1)-1+f(1)-1=0 \Leftrightarrow (f(1)-1)(f^2(1)+f(1)+2)=0$ οπότε $f(1)=1$,

αφού $f^2(1)+f(1)+2>0$ επειδή $\Delta<0$ (τριώνυμο ως προς $f(1)$).

Άρα

$f(f(\lambda^2+\lambda-1))<1 \Leftrightarrow f(f(\lambda^2+\lambda-1))<f(1) \overset{f:\text{γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(\lambda^2+\lambda-1)<1 \Leftrightarrow f(\lambda^2+\lambda-1)<f(1) \overset{f:\text{γν.αύξ.}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \lambda^2+\lambda-1<1 \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda-2<0 \Leftrightarrow -2<\lambda<1.$

Θέμα 3°

Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$ και $f(A)=\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f^5(x)+f(x)=x+64$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f^{-1}.

iii. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

iv. Να βρείτε τα κοινά σημεία των f και f^{-1}.

Λύση

i. Για κάθε $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ θα δείξουμε ότι $x_1=x_2$.

Είναι: $2f^5(x_1)+f(x_1)=2f^5(x_2)+f(x_2)$. Λόγω της ισότητας: $2f^5(x)+f(x)=x+64$ (1), έχουμε $x_1+64=x_2+64 \Leftrightarrow x_1=x_2$. Άρα η f είναι $1-1$ στο $\mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι $1-1$ αντιστρέφεται, δηλαδή ορίζεται η συνάρτηση f^{-1} για $x\in f(A)=\mathbb{R}$.

“

Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: A\to R$, $A\subseteq R$ είναι 1 - 1 στο A

ii. Θέτουμε $f(x) = y,\ y \in \mathbb{R}$ (αφού $f(A) = \mathbb{R}$) στην ισότητα (1) οπότε παίρνουμε:
$2y^5 + y = x + 64 \Leftrightarrow x = 2y^5 + y - 64,\ y \in \mathbb{R}$.
Επομένως $f^{-1}(y) = 2y^5 + y - 64,\ y \in \mathbb{R}$.
Οπότε η αντίστροφη της f είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x) = 2x^5 + x - 64,\ x \in \mathbb{R}$.

iii. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $x_1^5 < x_2^5 \Leftrightarrow 2x_1^5 < 2x_2^5$, οπότε
$2x_1^5 + x_1 < 2x_2^5 + x_2 \Leftrightarrow 2x_1^5 + x_1 - 64 < 2x_2^5 + x_2 - 64 \Leftrightarrow f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$.
Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iv. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, f^{-1} έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης $f^{-1}(x) = f(x)$ (2).
Επειδή η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα θα δείξουμε ότι η εξίσωση (2) είναι ισοδύναμη με την $f^{-1}(x) = x$.

- Έστω $x_o \in \mathbb{R}$ ρίζα της εξίσωσης (2) τότε $f^{-1}(x_o) = f(x_o)$ (3). Θα δείξουμε ότι $f^{-1}(x_o) = x_o$.

  Έστω ότι $f^{-1}(x_o) \neq x_o$, δηλαδή $\left.\begin{array}{c} f^{-1}(x_o) > x_o \\ \text{ή} \\ f^{-1}(x_o) < x_o \end{array}\right\}$ (4).

  Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα οπότε από την (4) έχουμε ότι $\left.\begin{array}{c} f^{-1}(f^{-1}(x_o)) > f^{-1}(x_o) \\ \text{ή} \\ f^{-1}(f^{-1}(x_o)) < f^{-1}(x_o) \end{array}\right\}$ (5).

  Η (3) γράφεται $f^{-1}(f^{-1}(x_o)) = f^{-1}(f(x_o)) \Leftrightarrow f^{-1}(f^{-1}(x_o)) = x_o$.

  Οπότε από την (5) παίρνουμε αντιστοίχως $\left.\begin{array}{c} x_o > f^{-1}(x_o) \\ \text{ή} \\ x_o < f^{-1}(x_o) \end{array}\right\}$ που είναι άτοπο λόγω της (4).

  Άρα $f^{-1}(x_o) = x_o$.

- Αν το x_o είναι ρίζα της εξίσωσης $f^{-1}(x) = x$ δηλαδή $f^{-1}(x_o) = x_o$ είναι $f(f^{-1}(x_o)) = f(x_o) \Leftrightarrow x_o = f(x_o)$.

  Άρα $f(x_o) = f^{-1}(x_o)$ οπότε το x_o είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$.

Είναι λοιπόν
$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow 2x^5 + x - 64 = x \Leftrightarrow 2x^5 = 64 \Leftrightarrow x^5 = 32 \Leftrightarrow x = 2$.

Ακόμη $f^{-1}(2) = 2 \cdot 2^5 + 2 - 64 = 2$.

Οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν κοινό σημείο το A(2, 2).

ΚΑΡΛ ΤΕΟΝΤΟΡ ΒΑΪΕΡΣΤΡΑΣ (1815-1897)

Γερμανός μαθηματικός, από τους κυριότερους θεμελιωτές της σύγχρονης Μαθηματικής Ανάλυσης. Σπούδασε μαθηματικά κοντά στον Κρίστοφ Γκούντερμαν και η πρώτη προσωπική του έρευνα για τις αλγεβρικές διαφορικές εξισώσεις τον οδήγησε στην περίφημη αρχή της «αναλυτικής επέκτασης». Ο διδακτορικός τίτλος που του αποδόθηκε το 1854 σήμανε την πρώτη αναγνώριση. Σε δύο χρόνια είχε γίνει μέλος της Ακαδημίας του Βερολίνου. Ασχολούμενος τότε με τις αναλυτικές συναρτήσεις έφτασε σε μακράς πνοής εργασίες όπως στο «λογισμό των μεταβολών» και στην εύρεση ικανών συνθηκών για «ισχυρά ακρότατα». Υπήρξε ο εισηγητής της έννοιας των «στοιχειωδών διαιρετών», ενώ ερεύνησε και τις προσεγγιστικές συναρτήσεις πραγματικής ή μιγαδικής μεταβλητής. Η αυστηρότητα και η λιτότητα που διέκριναν τις γραπτές εργασίες του είχαν πλήρη συνάφεια και με τις πανεπιστημιακές παραδόσεις του. Οι μαρτυρίες μιλούν για ένα αριστοτέχνη δάσκαλο με απίστευτη χάρη στη μεταδοτικότητα του λόγου του.