ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΠΑΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ

Έστω συνάρτηση f συνεχής και 1-1 στο $[α, β]$. Τότε,

$\int_α^β f(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} ug'(u)du$,

όπου, $u_1 = f(α)$, $u_2 = f(β)$ και g η συνάρτηση με συνεχή παράγωγο για την οποία: $g(x) = f^{-1}(x)$,

για κάθε $x \in f([α, β])$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ (ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ)

Θέμα 1°

Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_{2(1+\sqrt{3})}^{3x+2} f(t)dt$, με $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)\sqrt{(x-2)^2-9}}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F καθώς και την παράγωγο της F

ii. Να δείξετε ότι $F(\frac{1}{συνx}) = x - \frac{π}{6}$, για κάθε $x \in (0, \frac{π}{2})$

iii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 8$, $x = 2(1+\sqrt{3})$

iv. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{2\sqrt{3}}^{6} \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-9}}dx$

Λύση

i.
- Η f είναι ορισμένη και συνεχής στο σύνολο: $A = (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$
  Επειδή $2(1+\sqrt{3}) \in (5, +\infty)$, η F είναι ορισμένη όταν: $(3x+2) \in (5, +\infty)$, άρα $3x + 2 > 5 \Leftrightarrow x > 1$
  Επομένως $D_F = (1, +\infty)$
- Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ η F είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση της 3x+2 με την $\int_{2(1+\sqrt{3})}^{x} f(t)dt$ (αρχική της f), οπότε έχουμε: $F΄(x) = f(3x+2)\cdot(3x+2)΄ = \dfrac{3}{3x\sqrt{(3x)^2-9}}\cdot 3 = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, (1)

ii. Για κάθε $x \in (0, \frac{π}{2})$ έχουμε: $0 < συνx < 1$, επομένως $\frac{1}{συνx} > 1$, άρα:(αφού $F\left(\frac{1}{συνx}\right)$ παραγωγίσιμη ως σύνθεση της $\frac{1}{συνx}$ με την F) προκύπτει $\left[F\left(\frac{1}{συνx}\right)\right]' = F΄\left(\frac{1}{συνx}\right)\cdot\left(\frac{1}{συνx}\right)' \overset{(1)}{=}$

$$\frac{1}{\frac{1}{συνx}\cdot\sqrt{\frac{1}{συν^2x}-1}}\cdot\frac{ημx}{συν^2x} = \frac{συνx}{\sqrt{\frac{1-συν^2x}{συν^2x}}}\cdot\frac{ημx}{συν^2x} = \frac{συνx}{\frac{ημx}{συνx}}\cdot\frac{ημx}{συν^2x} = \frac{συν^2x}{ημx}\cdot\frac{ημx}{συν^2x} = 1$$ Οπότε έχουμε:

$\left[F\left(\frac{1}{συνx}\right)\right]' = x'$, άρα ($F\left(\frac{1}{συνx}\right)$,x συνεχείς) $F\left(\frac{1}{συνx}\right) = x + c$, (2) ή ισοδύναμα:

$\int_{2(1+\sqrt{3})}^{\frac{3}{συνx}+2} f(t)dt = x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Από την τελευταία για $x = \frac{π}{6}$, παίρνουμε:

$\int_{2(1+\sqrt{3})}^{2\sqrt{3}+2} f(t)dt = \frac{π}{6} + c$, οπότε $\frac{π}{6} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{π}{6}$.

Συνεπώς από την (2) προκύπτει: $F\left(\frac{1}{συνx}\right) = x - \frac{π}{6}$, (3)

iii. Επειδή,

$f(t) = \dfrac{1}{(t-2)\sqrt{(t-2)^2-9}} > 0$ για κάθε $t > 5$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_{2(1+\sqrt{3})}^{8} f(t)dt = \int_{2(1+\sqrt{3})}^{3\cdot\frac{1}{συν\frac{π}{3}}+2} f(t)dt = F\left(\frac{1}{συν\frac{π}{3}}\right) \overset{(3)}{=} \frac{π}{3} - \frac{π}{6} = \frac{π}{6}$$

iv.
- Από το ερώτημα iii. έχουμε: $\int_{2(1+\sqrt{3})}^{8} \dfrac{1}{(t-2)\sqrt{(t-2)^2-9}}dt = \dfrac{π}{6}$, (4)
- Θέτουμε: $u = t - 2$, τότε: $du = dt$
  και
  - για $t = 2+2\sqrt{3}$, $u = 2\sqrt{3}$
  - για $t = 8$, $u = 6$

Οπότε η (4) γράφεται: $\int_{2\sqrt{3}}^{6} \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-9}}du = \dfrac{π}{6}$

Θέμα 2ο

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και τέτοια ώστε $f(x)=\int_x^3 \frac{2}{f^2(u)+5}du$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημο αυτής.
ii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής αυτής.
iii) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να προσδιορίσετε την f^{-1}
iv) Να βρείτε το εμβαδόν Ε του χωρίου Ω που ορίζεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=\frac{1}{3}$, $x=3$

Λύση

i) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και η $h(x)=\frac{2}{f^2(x)+5}$ είναι συνεχής σε αυτό.

Είναι $f(x)=\int_x^3 \frac{2}{f^2(u)+5}du=-\int_3^x \frac{2}{f^2(u)+5}du$, συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αρχική της $-h$,

με $f'(x)=-\frac{2}{f^2(x)+5}<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έτσι, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(3)=\int_3^3 \frac{2}{f^2(u)+5}du=0$,

άρα για κάθε $x<3$ έχουμε $f(x)>0$, ενώ για κάθε $x>3$ έχουμε $f(x)<0$

ii) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\left(f'(x)\right)'=\left(-\frac{2}{f^2(x)+5}\right)' \Leftrightarrow f''(x)=\frac{4f(x)f'(x)}{\left(f^2(x)+5\right)^2}$$

Επομένως: $f''(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=3$, αφού $\frac{4f'(x)}{\left(f^2(x)+5\right)^2}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Ακόμη $f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{4f(x)f'(x)}{\left(2+f^2(x)\right)^2}>0 \Leftrightarrow f(x)<0\Leftrightarrow x>3$, αφού $\frac{4f'(x)}{\left(f^2(x)+5\right)^2}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

όπως προκύπτει από το ερώτημα i). Συνεπώς η f είναι κοίλη στο $(-\infty,3]$ ενώ είναι κυρτή στο $[3,+\infty)$ (f συνεχής στο $\mathbb{R}$), άρα παρουσιάζει καμπή στο $x=3$ το $f(3)=0$

iii) Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ θα είναι και «1 – 1», άρα θα αντιστρέφεται.
Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x)=-\frac{2}{f^2(x)+5}\Leftrightarrow f'(x)f^2(x)+5f'(x)=-2\Leftrightarrow 3f'(x)f^2(x)+15f'(x)+6=0\Leftrightarrow\left(f^3(x)+15f(x)+6x\right)'=0$$

άρα (η $f^3(x)+15f(x)+6x$ συνεχής στο $\mathbb{R}$) $f^3(x)+15f(x)+6x=c$, $c\in\mathbb{R}$ και επειδή $f(3)=0$ παίρνουμε

$f^3(3)+15f(3)+18=c\Leftrightarrow c=18$, συνεπώς, $f^3(x)+15f(x)+6x-18=0$, (1)

Στην (1) θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και έχουμε $y^3+15y+6f^{-1}(y)-18=0$, $y\in\mathbb{R}$, οπότε

$f^{-1}(y)=3-\frac{y^3+15y}{6} \Leftrightarrow f^{-1}(y)=-\frac{y^3}{6}-\frac{5}{2}y+3$, $y\in\mathbb{R}$ και επομένως $f^{-1}(x)=-\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{2}x+3$, $x\in\mathbb{R}$

iv) Από ερώτημα i) έχουμε $f(3)=0$ και $f(x)>0$, για κάθε $x<3$,
οπότε για το ζητούμενο εμβαδόν Ε θα ισχύει (f συνεχής) $E=\int_{\frac{1}{3}}^3 f(x)dx$

Είναι $f(3)=0\Leftrightarrow f^{-1}(0)=3$ και $f^{-1}(1)=-\frac{1}{6}-\frac{5}{2}+3=\frac{1}{3}$, συνεπώς για το $\int_{\frac{1}{3}}^3 f(x)dx$,

θέτουμε $x=f^{-1}(t)$, $dx=\left(-\frac{1}{6}t^3-\frac{5}{2}t+3\right)'dt\Leftrightarrow dx=\left(-\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{2}\right)dt$

και $x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow f^{-1}(t)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow t=f\left(\frac{1}{3}\right)=1$, $x=3\Leftrightarrow f^{-1}(t)=3\Leftrightarrow t=0$

Επομένως (f^{-1} συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική): $E=\int_{\frac{1}{3}}^3 f(x)dx=\int_1^0 f\left(f^{-1}(t)\right)\left(-\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{2}\right)dt=$

$$-\frac{1}{2}\int_1^0 t\left(t^2+5\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^1\left(t^3+5t\right)dt=\frac{1}{2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1+\frac{1}{2}\left[\frac{5}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{2}\right)=\frac{11}{8}\text{ τ.μ.}$$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΚΟΥΡΤ ΓΚΕΝΤΕΛ (1906-1978)

Αμερικανός μαθηματικός, αυστριακοεβραϊκής καταγωγής, μέλος του κλαμπ των θετικιστών, χωρίς ο ίδιος να θεωρεί «θετικιστή» τον εαυτό του. Η συμβολή του έχει να κάνει κυρίως με την ανάπτυξη της μαθηματικής λογικής. Δημοσίευση λίγες σχετικά εργασίες αλλά τα θεωρήματά του αποτέλεσαν τους θεμέλιους λίθους της μαθηματικής λογικής. Κορυφαίο θεώρημά του, αυτό της μη πληρότητας, που απέδειξε το 1931 και πήρε το όνομά του. Σύμφωνα με αυτό, οποιαδήποτε μαθηματική θεωρία, που περιέχει τους θετικούς ακεραίους και θεμελιώνεται πάνω σε συμβιβαστά αξιώματα δεν είναι πλήρης. Ο Γκέντελ απέδειξε επίσης ότι αν μια αξιωματική επί των συνόλων είναι συμβιβαστή, τότε παραμένει συμβιβαστή και μετά την προσθήκη του αξιώματος της επιλογής του Ερνστ Τσερμέλο. Με αυτό το θεώρημα τερματίστηκε η μεγάλη διαμάχη που είχε διχάσει τους μαθηματικούς στις πρώτες δεκαετίες του 20 αιώνα σχετικά με τη χρησιμοποίηση του αξιώματος της επιλογής. Στην Αμερική ο Γκέντελ βρέθηκε όπως και πολλοί άλλοι εβραϊκής καταγωγής Ευρωπαίοι επιστήμονες μετά την άνοδο του ναζισμού στην Γερμανία και την Αυστρία.