**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΤΑΣΟΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΝΟΥΛΗΣ
ΝΙΚΟΣ ΖΑΧΟΠΟΥΛΟΣ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΜΑΡΙΝΗΣ
ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΤΣΟΥΠΡΑΣ

"Έστω συνάρτηση f:A→ R και ρ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο ρ και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε f′(ρ)=0.



## ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

**Θέμα 1°**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+|x-4|,\ x\in[-2,6]$.

α. Να βρείτε τις πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της $f$.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f$.

γ. Έστω συνάρτηση $g$ παραγωγίσιμη και γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 4]$ με σύνολο τιμών το $[0, 4]$.

Να δείξετε ότι υπάρχει $\rho\in(-2,4)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f'(g(\rho))\cdot g'(\rho)=\frac{2}{3}$.

**Λύση**

α. Για $x\in[-2,4]$ η $f(x)=x^2-4x-x+4 \Leftrightarrow f(x)=x^2-5x+4$, ενώ για $x\in(4,6]$

η $f(x)=x^2-4x+x-4 \Leftrightarrow f(x)=x^2-3x-4$.

Επομένως $f(x)=\begin{cases} x^2-5x+4, & x\in[-2,4] \\ x^2-3x-4, & x\in(4,6] \end{cases}$

Οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της $f$ είναι:

- Οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$ στο διάστημα $(-2, 6)$.
- Τα σημεία του διαστήματος $(-2, 6)$ στα οποία η $f$ δεν είναι παραγωγίσιμη.
- Τα άκρα του διαστήματος $[-2, 6]$,δηλαδή τα $-2$ και $6$ .

Είναι $\lim\limits_{x\to 4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^-}\frac{x^2-5x+4}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^-}\frac{(x-1)(x-4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^-}(x-1)=3$ ενώ

$\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{x^2-3x-4}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^-}\frac{(x+1)(x-4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^-}(x+1)=5\neq 3$,

δηλαδή η $f$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 4$.

Επομένως το 4 είναι πιθανή θέση τοπικού ακρότατου της $f$.
Ακόμη για $x\in(-2,4)$ είναι $f'(x)=2x-5$.

Τότε $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}\in(-2,4)$.

Άρα το $\frac{5}{2}$ είναι πιθανή θέση τοπικού ακρότατου της $f$.

Επίσης για $x\in(4,6)$ είναι $f'(x)=2x-3$. Τότε $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}\notin(4,6)$,

άρα απορρίπτεται.

Συνεπώς οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της $f$ είναι τα: $-2$, $\frac{5}{2}$, 4,6.

β. Η f είναι συνεχής στο $[-2, 6]$ και δεν είναι σταθερή σ΄αυτό, οπότε θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο $[-2, 6]$ την $m$, $M$ αντίστοιχα, δηλαδή το σύνολο τιμών της θα είναι το $[m, M]$.
Βρίσκουμε τις τιμές των πιθανών ακροτάτων της $f$:

$f(-2)=18,\ f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{9}{4},\ f(4)=0,\ f(6)=14.$

Επομένως $m=-\frac{9}{4}$, $M=18$. Άρα αν $A=[-2, 6]$ τότε $f(A)=\left[-\frac{9}{4},\ 18\right]$.

γ. Επειδή το σύνολο τιμών της $g$ είναι το $[0,4]\subseteq[-2,4]$, η συνάρτηση $f\circ g$ ορίζεται στο σύνολο:
$B=\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_f\}=[-2,4]$ και έχει τύπο $(f\circ g)(x)=f(g(x))=g^2(x)-5g(x)+4$ αφού για $x\in[-2,4]$ είναι $f(x)=x^2-5x+4$.
Άρα η $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, 4)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και συνεχής στο $[-2,4]$ ως σύνθεση των συνεχών στο $[-2,4]$ συναρτήσεων g, f.
Συνεπώς για τη $f\circ g$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ., άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\rho \in (-2, 4)$ τέτοιο, ώστε $(f \circ g)'(\rho) = \dfrac{(f \circ g)(4) - (f \circ g)(-2)}{6}$ (1).

Όμως $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ και

$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(0) = |-4| = 4$, $(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(4) = 0$,

αφού στο $[-2, 4]$ η $g$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής ως παραγωγίσιμη με σύνολο τιμών το $[0, 4]$.

Επομένως η (1) γίνεται $f'(g(\rho)) \cdot g'(\rho) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

**Θέμα 2ο**

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε να ισχύει

$$2f^5(x) + e^{2f(x)} = e^x - ex + e^2 + 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να εξετάσετε την $f$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να βρείτε την τιμή των ακροτάτων.

γ. Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ισχύουν $f(x) - g(x) \geq 2 - e^x$ (1), για κάθε $x > 0$ και $g(1) = e - 1$, να δείξετε ότι $g'(1) = e$.

**Λύση**

α. Οι συναρτήσεις $f^5(x)$, $e^{2f(x)}$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ (ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων), οπότε παραγωγίζοντας τη σχέση της υπόθεσης έχουμε

$$10f^4(x)f'(x) + 2f'(x)e^{2f(x)} = e^x - e \Leftrightarrow 2f'(x)\left(5f^4(x) + e^{2f(x)}\right) = e^x - e \quad (2).$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $5f^4(x) + e^{2f(x)} > 0$, οπότε από τη (2) συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσει $f'(x)$, $h(x) = e^x - e$ είναι ομόσημες και ότι οι εξισώσεις $f'(x) = 0$, $h(x) = 0$ είναι ισοδύναμες.

Συνεπώς $f'(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - e = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - e > 0 \Leftrightarrow x > 1$, (αφού η $\varphi(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$).

Επομένως: η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ αφού είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο $[1, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ αφού είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο $(-\infty, 1]$ και ισχύει $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 1)$.

Άρα η $f$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o = 1$ το $f(1)$.

β. Για $x = 1$ από τη σχέση της υπόθεσης παίρνουμε: $2f^5(1) + e^{2f(1)} = e - e + e^2 + 2 = e^2 + 2$ (3).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = 2x^5 + e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $F'(x) = 10x^4 + 2e^{2x} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε η $F$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως και «1 – 1» σ' αυτό.

Η (3) είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$F(f(1)) = F(1)$ αφού $F(1) = e^2 + 2$ και $F(f(1)) = 2f^5(1) + e^{2f(1)}$. Συνεπώς από $F(f(1)) = F(1)$ έχουμε $f(1) = 1$ επειδή F:«1 – 1».

γ. Η (1) γίνεται $f(x) - g(x) + e^x - 2 \geq 0$ (4), για κάθε $x > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x) = f(x) - g(x) + e^x - 2$, $x > 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Ακόμη $G(1) = f(1) - g(1) + e - 2 \underset{\text{υποθ.}}{\overset{\beta.}{=}} 1 - e + 1 + e - 2 = 0$.

Επομένως η (4) γίνεται $G(x) \geq G(1)$, για κάθε $x > 0$, δηλαδή η $G$ παρουσιάζει (ολικό ελάχιστο) στο $x_o = 1 \in (0, +\infty)$. Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $G'(1) = 0$.

Όμως $G'(x) = f'(x) - g'(x) + e^x$ που για $x = 1$ γίνεται

$$G'(1) = f'(1) - g'(1) + e \underset{\alpha.}{\overset{f'(1)=0}{\Leftrightarrow}} 0 = e - g'(1) \Leftrightarrow g'(1) = e.$$

## ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

### ΓΚΟΤΦΡΙΝΤ ΒΙΛΧΕΛΜ ΦΟΝ ΛΑΪΜΠΝΙΤΣ (1646-1716)

Γερμανός φιλόσοφος και μαθηματικός από τις πλέον πολύπλευρες προσωπικότητες του δυτικού πολιτισμού. Έχει συνδέσει το όνομά του με τα μαθηματικά, κυρίως λόγω της επινόησης και οικοδόμησης του απειροστικού λογισμού (διαφορικού και ολοκληρωτικού). Το επίτευγμα αυτό παρουσιάστηκε σχεδόν ταυτόχρονα από τον Νεύτωνα στην Αγγλία, χωρίς ο ένας να γνωρίζει τι ποιεί ο άλλος!.. Σχετικά με την προτεραιότητα ξέσπασε διαμάχη, η οποία δεν περιορίστηκε μόνο μεταξύ των δύο πρωταγωνιστών αλλά πήρε και εθνικές διαστάσεις. Το σίγουρο είναι ότι οι συμβολισμοί που επινόησε ο Λάιμπνιτς αποδείχτηκαν τότε πιο εύχρηστοι και βοήθησαν σημαντικά στην άνθηση της μαθηματικής παραγωγικότητας. Η σύλληψη της θεωρίας του Λάιμπνιτς δημοσιεύτηκε από τον ίδιο το 1684 σε ένα 16σέλιδο άρθρο υπό τον ατελείωτο τίτλο «Νέα μέθοδος για μέγιστα και ελάχιστα καθώς και εφαπτόμενες, που δεν εμποδίζεται από κλασματικές και άρρητες ποσότητες, και ένας ιδιαίτερος τρόπος για τον υπολογισμό τους»! Πλουσιότατη υπήρξε η συγγραφική του δραστηριότητα και σε θεολογικά και φιλοσοφικά ζητήματα της εποχής του, που ως γόνος ευσεβούς οικογένειας - βαρόνος ο ίδιος - στοχάστηκε ανάλογα...