ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΤΑΣΟΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΝΙΚΟΣ ΚΟΚΟΛΗΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ
ΝΙΚΟΣ ΖΑΧΟΠΟΥΛΟΣ

“

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και αντιστρέψιμη στο $[\alpha, \beta]$ τότε, $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\gamma^\delta ug'(u)du$, όπου γ = f(α), δ = f(β) και g η συνάρτηση με συνεχή παράγωγο για την οποία $g(x) = f^{-1}(x)$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w τέτοιους ώστε $w - \bar{z} = 4$, $w \neq 3$, $|w|^2 < 6\mathrm{Re}(w) - \frac{35}{4}$ και τη συνάρτηση

$f(x) = \dfrac{e^x - x|z+1|}{e^x + 2|z+1|}$, $x \geq -1$. Να δείξετε ότι:

i) $|z+1| < \frac{1}{2}$.

ii) Η εξίσωση $(x+1)e^x = 2|z+1|$ έχει μοναδική λύση x_o στο διάστημα $(-1, +\infty)$.

iii) $f(x) \geq \dfrac{1-x_o}{2}$, για κάθε $x \geq -1$.

Λύση

i) Είναι $|w|^2 < 6\mathrm{Re}(w) - \frac{35}{4} \Leftrightarrow w\bar{w} < 3(w+\bar{w}) - 9 + \frac{1}{4} \Leftrightarrow w\bar{w} - 3w - 3\bar{w} + 9 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (w-3)(\bar{w}-3) < \frac{1}{4} \Leftrightarrow (w-3)\left(\overline{w-3}\right) < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |w-3|^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |w-3| < \frac{1}{2}$ (1).

Όμως $w - \bar{z} = 4 \Leftrightarrow w - 3 = \bar{z} + 1$ οπότε $|w-3| = |\bar{z}+1| \Leftrightarrow |w-3| = \left|\overline{z+1}\right| \Leftrightarrow |w-3| = |z+1|$ και επομένως η (1) γίνεται $|z+1| < \frac{1}{2}$.

ii) $(x+1)e^x = 2|z+1| \Leftrightarrow (x+1)e^x - 2|z+1| = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = (x+1)e^x - 2|z+1|$, $x \geq -1$, οπότε φ(x) = 0 $\Leftrightarrow (x+1)e^x = 2|z+1|$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση φ(x) = 0 έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(-1, +\infty)$. Είναι:

- $\varphi(-1) = -2|z+1| < 0$, αφού αν $|z+1| = 0$ τότε ισοδύναμα $|\bar{z}+1| = 0 \overset{\text{υποθ.}}{\Leftrightarrow} |w-3| = 0$, άτοπο (επειδή $w \neq 3$).
- $\varphi(0) = 1 - 2|z+1| > 0$, αφού $|z+1| < \frac{1}{2}$ από ερώτημα (i).

Συνεπώς φ(– 1)φ(0) < 0 και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[-1, 0] \subset [-1, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, θα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_o) = 0$.

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $[-1, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$\varphi'(x) = \left[(x+1)e^x\right]' - \left(2|z+1|\right)' = e^x + (x+1)e^x - 0 = (x+2)e^x > 0$, για κάθε $x \geq -1$. Επομένως η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$ άρα η λύση x_o είναι μοναδική.

iii) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - x|z+1|}{e^x + 2|z+1|}\right)' = \frac{\left(e^x - |z+1|\right)\left(e^x + 2|z+1|\right) - \left(e^x - x|z+1|\right)e^x}{\left(e^x + 2|z+1|\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^x|z+1| - e^x|z+1| - 2|z+1|^2 - e^{2x} + xe^x|z+1|}{\left(e^x + 2|z+1|\right)^2} = \frac{e^x|z+1| + xe^x|z+1| - 2|z+1|^2}{\left(e^x + 2|z+1|\right)^2} =$$

$$= \frac{|z+1|}{\left(e^x + 2|z+1|\right)^2}\left[(x+1)e^x - 2|z+1|\right] = \frac{|z+1|}{\left(e^x + 2|z+1|\right)^2} \cdot \varphi(x).$$

Όμως $\dfrac{|z+1|}{\left(e^x + 2|z+1|\right)^2} > 0$, άρα η $f'(x)$ θα έχει πρόσημο και ρίζες το πρόσημο και τις ρίζες της φ(x). Είναι (από ii ερώτημα) $\varphi(x_o) = 0$ και φ γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$, επομένως φ(x) < 0 για $x \in [-1, x_o)$ και φ(x) > 0, για $x \in (x_o, +\infty)$.

Έτσι $f'(x_o) = 0$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[-1, x_o]$, γνησίως αύξουσα στο $[x_o, +\infty)$ (f συνεχής στο $[-1, +\infty)$), άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = x_o$ το $f(x_o) = \dfrac{e^{x_o} - x_o|z+1|}{e^{x_o} + 2|z+1|}$. Αλλά

$\varphi(x_o) = 0 \overset{\text{ii ερωτ.}}{\Leftrightarrow} (x_o+1)e^{x_o} = 2|z+1| \overset{x_o > -1}{\Leftrightarrow} e^{x_o} = \dfrac{2|z+1|}{x_o+1}$ και επομένως

$$f(x_o)=\frac{\frac{2|z+1|}{x_o+1}-x_o|z+1|}{\frac{2|z+1|}{x_o+1}+2|z+1|}\overset{|z+1|>0}{=}\frac{2-x_o^2-x_o}{2+2x_o+2}=-\frac{(x_o+2)(x_o-1)}{2(x_o+2)}=\frac{1-x_o}{2}.$$

Επομένως για κάθε $x\geq -1$ ισχύει $f(x)\geq\frac{1-x_o}{2}$.

Θέμα 2ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε $f(x)=\int_1^x\frac{1}{2+f^2(t)}dt$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημο αυτής.
ii) Να βρείτε το σημείο καμπής της f.
iii) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη f^{-1} αυτής.
iv) Να βρείτε το εμβαδόν Ε του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=1$, $x=\frac{10}{3}$.

Λύση

i) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και η $\varphi(x)=\frac{1}{2+f^2(x)}$ είναι συνεχής σε αυτό ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Συνεπώς, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αρχική της φ με $f'(x)=\frac{1}{2+f^2(x)}>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έτσι, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(1)=\int_1^1\frac{1}{2+f^2(t)}dt=0$, άρα για κάθε $x<1$ έχουμε $f(x)<f(1)\Leftrightarrow f(x)<0$, ενώ για κάθε $x>1$ έχουμε $f(x)>f(1)\Leftrightarrow f(x)>0$.

ii) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\left(f'(x)\right)'=\left(\frac{1}{2+f^2(x)}\right)'\Leftrightarrow f''(x)=-\frac{2f(x)f'(x)}{\left(2+f^2(x)\right)^2},\quad \text{οπότε}\quad f''(x)=0\Leftrightarrow -2f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=1$$

αφού $\frac{f'(x)}{\left(2+f^2(x)\right)^2}\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ακόμη $f''(x)>0\Leftrightarrow -\frac{2f(x)f'(x)}{\left(2+f^2(x)\right)^2}>0\Leftrightarrow f(x)<0\Leftrightarrow x<1$ αφού $-\frac{2f'(x)}{\left(2+f^2(x)\right)^2}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όπως προκύπτει από το ερώτημα (i). Συνεπώς η f είναι κυρτή στο $(-\infty,1]$ ενώ είναι κοίλη στο $[1,+\infty)$ (f συνεχής στο $\mathbb{R}$), άρα παρουσιάζει καμπή στο $x=1$ το $f(1)=0$.

iii) Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα είναι και «1 – 1», άρα θα αντιστρέφεται. Έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ότι: $f'(x)=\frac{1}{2+f^2(x)}\Leftrightarrow 2f'(x)+f'(x)f^2(x)=1\Leftrightarrow 6f'(x)+3f'(x)f^2(x)=3\Leftrightarrow\left(6f(x)+f^3(x)\right)'=(3x)'\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6f(x)+f^3(x)=3x+c,\ c\in\mathbb{R}$ και επειδή $f(1)=0$ παίρνουμε $6f(1)+f^3(1)=3+c\Leftrightarrow c=-3$, άρα $6f(x)+f^3(x)=3x-3$, (1).

Στην (1) θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και έχουμε $6y+y^3=3f^{-1}(y)-3$, $y\in\mathbb{R}$ οπότε

$f^{-1}(y)=\frac{6y+y^3+3}{3}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{y^3}{3}+2y+1$, $y\in\mathbb{R}$ και επομένως $f^{-1}(x)=\frac{x^3}{3}+2x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

iv) Από ερώτημα (ii) έχουμε $f(1)=0$ και $f(x)>0$, για κάθε $x>1$, οπότε για το ζητούμενο εμβαδόν Ε θα ισχύει (f συνεχής) $E=\int_1^{\frac{10}{3}}f(x)dx$.

Είναι $f(1)=0\Leftrightarrow f^{-1}(0)=1$ και $f^{-1}(1)=\frac{1}{3}+2+1=\frac{10}{3}$, συνεπώς για το $\int_1^{\frac{10}{3}}f(x)dx$ θέτουμε $x=f^{-1}(u)$, άρα

$dx=\left(f^{-1}(u)\right)'du\overset{iii)}{\Leftrightarrow}dx=\left(\frac{u^3}{3}+2u+1\right)'du\Leftrightarrow dx=\left(u^2+2\right)du$ και

$x=1\Leftrightarrow f^{-1}(u)=1\Leftrightarrow u=0$, $x=\frac{10}{3}\Leftrightarrow f^{-1}(u)=\frac{10}{3}\Leftrightarrow u=1$.

Επομένως $E=\int_0^1 f\left(f^{-1}(u)\right)\left(u^2+2\right)du=\int_0^1 u\left(u^2+2\right)du=\int_0^1\left(u^3+2u\right)du=\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1+\left[u^2\right]_0^1=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$ τ.μ.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΕΒΑΡΙΣΤ ΓΚΑΛΟΥΑ (1811-1832)

Μαθηματική ιδιοφυΐα που πρόσφερε έργο κεφαλαιώδους σημασίας και ταυτόχρονα μια από τις τραγικότερες μορφές στην ιστορία των μαθηματικών. Γεννήθηκε στη Bourg-la-Reine κοντά στο Παρίσι και στην πολύ σύντομη ζωή του βρέθηκε πολλές φορές αντιμέτωπος με την αδικία και τον αυταρχισμό. Το 1830 έγινε δεκτός στην Ecole Normale Superieure αλλά σύντομα αποβλήθηκε, γιατί συντάχθηκε με τους δημοκρατικούς και πήρε μέρος σε επαναστατικές διαδηλώσεις, γεγονός που του στοίχισε και μερικούς μήνες φυλακή. Η προσφορά του δε βασίζεται μόνο στα λίγα άρθρα του που δημοσιεύτηκαν όσο ζούσε. Ήδη από το 1829 είχε φτάσει σε αξιόλογα εξαγόμενα και προσπάθησε να τα παρουσιάσει στην Ακαδημία των Επιστημών. Στα 1832, για αδιευκρίνιστους λόγους, ένας αξιωματικός τον κάλεσε σε μονομαχία κατά την οποία ο μεγάλος μαθηματικός σκοτώθηκε. Όλη την προηγούμενη νύχτα αποτύπωσε βιαστικά στο χαρτί την επιστημονική του διαθήκη. Μέσα από το έργο του πέτυχε να δώσει απάντηση στο πότε είναι ή όχι επιλύσιμη μια αλγεβρική εξίσωση θέτοντας τις βάσεις της «θεωρίας των ομάδων». Το έργο του ξεκινώντας από την επίλυση ενός κλασικού προβλήματος οδήγησε στη δημιουργία μιας νέας θεωρίας που αποτελεί σήμερα βασικό κορμό της σύγχρονης άλγεβρας.