ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΝΙΚΟΣ ΖΑΧΟΠΟΥΛΟΣ
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΒΑΜΒΑΚΑΡΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΟΡΙΛΗΣ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΒΛΑΧΟΣ

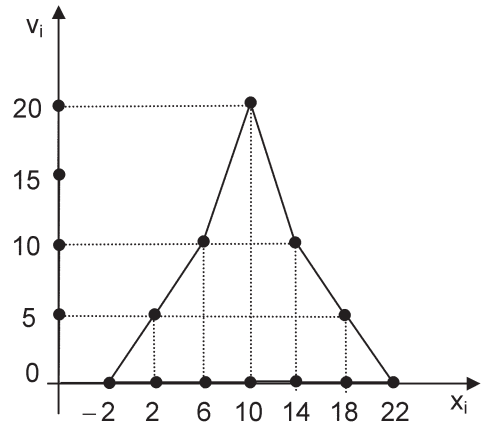
Αν Α, Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω, τότε:

- $P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$
- $P(A'\cup B)=1-P(A)+P(A\cap B)$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Θέμα 1°

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το πολύγωνο συχνοτήτων που παρουσιάζει ομαδοποιημένη τη βαθμολογία των μαθητών της Γ΄ Λυκείου ενός σχολείου στο μάθημα της Λογοτεχνίας.



α) Να κάνετε τον πίνακα συχνοτήτων.

β) Να βρείτε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής (δίνεται ότι $\sqrt{19,2}\simeq 4,38$)

Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ) Υποθέτουμε ότι σε κάθε κλάση υπάρχει ίσος αριθμός μαθητών και μαθητριών, ομοιόμορφα κατανεμημένων κατά φύλο ως προς τη βαθμολογία στο μάθημα της Λογοτεχνίας. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο από το δείγμα.

Να βρείτε την πιθανότητα:

i) Να είναι μαθητής και να έχει βαθμό το πολύ 9
ii) Να είναι μαθητής ή να έχει βαθμό το πολύ 9
iii) Να μην είναι μαθητής και να έχει βαθμό τουλάχιστον 9
iv) Να πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα ενδεχόμενα: μαθητής, άτομο με βαθμό το πολύ 9

Λύση

α) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι τα κέντρα των κλάσεων είναι: 2, 6, 10, 14, 18 και το πλάτος των κλάσεων είναι $d=4$. Συνεπώς ο ζητούμενος πίνακας είναι:

Βαθμολογία	**Κέντρα κλάσεων x_i**	**Συχνότητα v_i**
$0-4$	2	5
$4-8$	6	10
$8-12$	10	20
$12-16$	14	10
$16-20$	18	5
Σύνολο		50

β) $$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iv_i}{v}=\frac{10+60+200+140+90}{50}=\frac{500}{50}=10$$

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2v_i}{v}=\frac{8^2\cdot5+4^2\cdot10+4^2\cdot10+8^2\cdot5}{50}=\frac{960}{50}=19,2 \text{ άρα } s=\sqrt{19,2}\simeq 4,38$$

$CV=\dfrac{s}{\bar{x}}=\dfrac{4,38}{10}\cdot100\%=43,8\%$, επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές, αφού $CV>10\%$

γ) Έστω Γ το ενδεχόμενο: το άτομο που επιλέγουμε (τυχαία) είναι μαθητής.

Επειδή σε κάθε κλάση υπάρχει ίσος αριθμός μαθητών και μαθητριών, ισχύει $P(\Gamma)=\dfrac{25}{50}=\dfrac{1}{2}$

Αν Α το ενδεχόμενο: το άτομο που επιλέγουμε έχει βαθμό το πολύ 9, τότε:

$$P(A)=\frac{5}{50}+\frac{10}{50}+\left(\frac{1}{4}\cdot20\right)\frac{1}{50}=\frac{5+10+5}{50}=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}=40\%$$

i) Το ενδεχόμενο να είναι μαθητής και να έχει βαθμό το πολύ 9,είναι $\Gamma\cap A$. Η πιθανότητα πραγματοποίησής του είναι $P(\Gamma\cap A)=\dfrac{10}{50}=20\%$, διότι 20 άτομα έχουν βαθμό το πολύ 9, οπότε 10 θα είναι μαθητές και 10 μαθήτριες, αφού οι μαθητές και οι μαθήτριες έχουν ομοιόμορφη κατανομή στις κλάσεις.

ii) Το ενδεχόμενο να είναι μαθητής ή να έχει βαθμό το πολύ 9, είναι το $\Gamma\cup A$, με πιθανότητα:

$$P(\Gamma\cup A)=P(\Gamma)+P(A)-P(\Gamma\cap A)=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{7}{10}=70\%$$

iii) Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $(\Gamma\cup A)'$, με πιθανότητα:

$$P\left[(\Gamma\cup A)'\right]=1-P(\Gamma\cup A)=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}=30\%$$

iv) Το ενδεχόμενο: πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Γ, Α είναι το $(\Gamma-A)\cup(A-\Gamma)$, με πιθανότητα:

$$P\left[(\Gamma-A)\cup(A-\Gamma)\right]=P(\Gamma-A)+P(A-\Gamma)=P(\Gamma)-P(\Gamma\cap A)+P(A)-P(\Gamma\cap A)=$$

$$P(\Gamma)+P(A)-2P(\Gamma\cap A)=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-2\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2}=50\%,\ (\text{αφού } (\Gamma-A)\cap(A-\Gamma)=\varnothing)$$

Θέμα 2°

Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες πραγματοποίησης P(A), P(B) για τις οποίες ισχύουν: $(P(A))^2 - \frac{1}{2}P(A) + \frac{1}{16} = 0$ και $\left|P(B) - \frac{4}{5}\right| = 0$

α) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα.

β) Να δείξετε ότι:

i) $P(A \cup B) \geq \frac{1}{4}$ ii) $\frac{1}{20} \leq P(A \cap B) \leq \frac{4}{5}$ iii) $P(A' \cup B) \geq \frac{11}{20}$

γ) Αν επιπλέον $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και $P(\omega_3) = 4P(\omega_4)$ με ω_i, $i = 1, 2, 3, 4$ (στοιχειώδη) απλά ενδεχόμενα του Ω, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ και Γ "πραγματοποιείται ένα ακριβώς από τα Α και Β"

Λύση

Είναι $(P(A))^2 - \frac{1}{2}P(A) + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow \left(P(A) - \frac{1}{4}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{4}$ και $\left|P(B) - \frac{4}{5}\right| = 0 \Leftrightarrow P(B) = \frac{4}{5}$

α) Έστω ότι τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα, τότε θα ισχύει:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{4}{5} = \frac{21}{20} > 1$ που είναι αδύνατο.

Επομένως τα Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα, δηλαδή $A \cap B \neq \varnothing$

β) i) Είναι $P(A) = \frac{1}{4}$, άρα $P(A \cup B) \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(A \cup B) \geq P(A)$ που ισχύει, αφού $A \subseteq A \cup B$

ii) Ισχύει $A \cap B \subseteq B$ άρα $P(A \cap B) \leq P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq \frac{4}{5}$

Για την $P(A \cap B) \geq \frac{1}{20}$, εφαρμόζουμε προσθετικό νόμο πιθανοτήτων και έχουμε:

$P(A \cup B) \leq 1 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{21}{20} - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{20} \leq P(A \cap B)$

iii) $P(A' \cup B) \geq \frac{11}{20} \Leftrightarrow P(A') + P(B) - P(A' \cap B) \geq \frac{11}{20} \Leftrightarrow 1 - P(A) + P(B) - P(A' \cap B) \geq \frac{11}{20} \Leftrightarrow$

$1 - \frac{1}{4} + \frac{4}{5} - P(A' \cap B) \geq \frac{11}{20} \Leftrightarrow P(A' \cap B) \leq \frac{31}{20} - \frac{11}{20} \Leftrightarrow P(A' \cap B) \leq 1$, που ισχύει.

γ) Είναι:

$P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1$, (1), $P(\omega_1) + P(\omega_2) = P(A) = \frac{1}{4}$, (2),

$P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = P(B) = \frac{4}{5}$, (3)

Οπότε:

(1) – (2): $P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{3}{4}$, (4) και (1) – (3): $P(\omega_1) = \frac{1}{5}$, (5)

Άρα από (2): $P(\omega_2) = \frac{1}{4} - P(\omega_1) \Leftrightarrow P(\omega_2) = \frac{1}{20}$

Ακόμη: $P(\omega_3) = 4P(\omega_4)$,

άρα από (3): $\frac{1}{20} + 4P(\omega_4) + P(\omega_4) = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5P(\omega_4) = \frac{4}{5} - \frac{1}{20} \Leftrightarrow 5P(\omega_4) = \frac{15}{20} \Leftrightarrow P(\omega_4) = \frac{3}{20}$,

οπότε, $P(\omega_3) = 4 \cdot \frac{3}{20} \Leftrightarrow P(\omega_3) = \frac{3}{5}$

Το ενδεχόμενο Γ "πραγματοποιείται ένα ακριβώς από τα Α και Β", είναι το $[(A - B) \cup (B - A)]$,

με $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$, και $A \cap B = \{\omega_2\}$, άρα $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$,

οπότε:

$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) =$

$P(A) + P(B) - 2\,P(A \cap B)$

Επομένως,

$P[(A - B) \cup (B - A)] = \frac{1}{4} + \frac{4}{5} - 2 \cdot \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΜΠΑΡΤΕΛ ΛΕΕΝΤΕΡΤ ΒΑΝ ΝΤΕΡ ΒΑΡΝΤΕΝ (1903-1996)

Ολλανδός μαθηματικός με μεγάλη προσφορά στην επιστήμη του χάρη στις πάμπολλες εργασίες που δημοσίευσε για την άλγεβρα, την αλγεβρική γεωμετρία, τη στατιστική, την ιστορία των μαθηματικών. Υπήρξε στέλεχος της «γερμανικής» σχολής μαθηματικών, αφού σπούδασε δίπλα στον Έμιλ Άρτιν και την Έμι Νέτερ. Το μεγαλύτερο και σπουδαιότερο, εξάλλου, σύγγραμμά του ήταν η «Σύγχρονη Άλγεβρα» (1930-31), που δεν ήταν παρά η ενοποίηση της γερμανικής αλγεβρικής σκέψης, όπως αυτή είχε αναπτυχθεί από τους μεγάλους των αρχών του 20ου αιώνα, Χίλμπερτ, Ντέντεκιντ, Στάινιτς, Νέτερ και Άρτιν. Το βιβλίο αυτό αποτέλεσε τομή στην παρουσίαση των αλγεβρικών εννοιών και παραμένει ακόμη και σήμερα το πρότυπο για την διδασκαλία της άλγεβρας στα καλύτερα πανεπιστήμια του κόσμου.