ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΔΙΟΛΙΤΣΗΣ

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν:
- $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha,\beta)$
- $f'(x)<0$ στο (α,x_0)
- $f'(x)>0$ στο (x_0,β)

τότε, η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$, ελάχιστο.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ: ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θέμα 1°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-2+\dfrac{\alpha}{x-2}$, $x\neq 2$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Αν η εφαπτομένη ευθεία (ε) στην καμπύλη της f στο σημείο $M(1,f(1))$ είναι παράλληλη προς την ευθεία (η): $y=-8x+1$, τότε:

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α

β) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να λύσετε τη εξίσωση $f'(x)-(x-2)f''(x)+\dfrac{2}{(x-2)^2}=0$

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\neq 2$ (ως άθροισμα παραγωγισίμων),

με $f'(x)=\dfrac{(x-2)^2-\alpha}{(x-2)^2}$, $x\neq 2$. Η ευθεία $y=-8x+1$, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{(\eta)}=-8$, (1)

Αφού η εφαπτομένη ευθεία (ε) στην καμπύλη της f στο σημείο $M(1,f(1))$ είναι παράλληλη προς την ευθεία (η), θα ισχύει $\lambda_{(\varepsilon)}=-8$, άρα και $f'(1)=-8$

Όμως $f'(1)=1-\alpha$, που λόγω της (1) γίνεται: $-8=1-\alpha \Leftrightarrow \alpha=9$

β) Για $\alpha=9$, έχουμε $f(x)=x-2+\dfrac{9}{x-2}$, $x\neq 2$ και $f'(x)=\dfrac{(x-2)^2-9}{(x-2)^2}$, $x\neq 2$

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0$, δηλαδή: $\dfrac{(x-2)^2-9}{(x-2)^2}=0 \Leftrightarrow (x-2)^2-9=0$, με $x\neq 2$

Έχουμε: $(x-2)^2-9=(x-5)(x+1)$, οπότε,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1)=0$, που δίνει λύσεις τις $x=5$, $x=-1$

Ακόμη $f'(x)>0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1)>0$, άρα $x<-1$ ή $x>5$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι: η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ -1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1,\ 2)$, γνησίως φθίνουσα στο $(2,\ 5]$ και γνησίως αύξουσα στο $[5,\ +\infty)$

Επομένως η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-1$, το $f(-1)=-1-2+\dfrac{9}{-1-2}=-6$

και τοπικό ελάχιστο για $x=5$, το $f(5)=5-2+\dfrac{9}{5-2}=6$

γ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη για κάθε $x\neq 2$,

με $f''(x)=\left(1-\dfrac{9}{(x-2)^2}\right)'=\dfrac{18}{(x-2)^3}$

Είναι: $f'(x)-(x-2)f''(x)+\dfrac{2}{(x-2)^2}=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)^2-9}{(x-2)^2}-(x-2)\dfrac{18}{(x-2)^3}+\dfrac{2}{(x-2)^2}=0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{(x-2)^2-9}{(x-2)^2}-\dfrac{18}{(x-2)^2}+\dfrac{2}{(x-2)^2}=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)^2-25}{(x-2)^2}=0 \Leftrightarrow (x-2)^2-25=0,\ x\neq 2$

Επομένως: $(x-2)^2-25=0 \Leftrightarrow (x-7)(x+3)=0$,

άρα οι λύσεις της εξίσωσης $f'(x)-(x-2)f''(x)+\dfrac{2}{(x-2)^2}=0$, είναι $x=-3$, $x=7$

Θέμα 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\ln\dfrac{4}{x+1}$, $x>-1$, $\alpha>0$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε το ακρότατο της f να έχει μέγιστη τιμή, την οποία να υπολογίσετε.

γ) Να δείξετε ότι $f(x)+\alpha\geq \ln(4\alpha e)$, για κάθε $x>-1$, $\alpha>0$

Λύση

α) Για $x>-1$, η f είναι παραγωγίσιμη με:

$$f'(x)=\left(\alpha x+\ln\frac{4}{x+1}\right)'=(\alpha x)'+\left(\ln\frac{4}{x+1}\right)'=\alpha+\left[\frac{x+1}{4}\left(\frac{4}{x+1}\right)'\right]=$$

$$\alpha+\frac{x+1}{4}\left[-\frac{4}{(x+1)^2}\right]=\alpha-\frac{1}{x+1}=\frac{\alpha(x+1)-1}{x+1}=\frac{\alpha x+\alpha-1}{x+1}$$

Οπότε: $f'(x)=\frac{\alpha x+\alpha-1}{x+1},\quad x>-1$

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha x+\alpha-1}{x+1}=0 \Leftrightarrow \alpha x+\alpha-1=0\Leftrightarrow \alpha x=1-\alpha\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}x=\frac{1-\alpha}{\alpha}$,

που για $\alpha>0$ είναι δεκτή, αφού: $\frac{1-\alpha}{\alpha}>-1\Leftrightarrow\frac{1-\alpha+\alpha}{\alpha}>0\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha}>0\Leftrightarrow\alpha>0$

Ακόμη: $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{\alpha x+\alpha-1}{x+1}>0\overset{x>-1}{\Leftrightarrow}$

$\alpha x+\alpha-1>0\Leftrightarrow\alpha x>1-\alpha\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}x>\frac{1-\alpha}{\alpha}$, ($\frac{1-\alpha}{\alpha}>-1$)

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-1,\ \frac{1-\alpha}{\alpha}\right]$ και

γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1-\alpha}{\alpha},\ +\infty\right)$

Επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) για $x=\frac{1-\alpha}{\alpha}$,

το: $f\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)=\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)+\ln\left(\frac{4}{\frac{1-\alpha}{\alpha}+1}\right)=1-\alpha+\ln\left(\frac{4}{\frac{1-\alpha+\alpha}{\alpha}}\right)=1-\alpha+\ln4\alpha,\ \alpha>0$

β) Επειδή το ελάχιστο της f περιέχει την παράμετρο α, μεταβάλλεται.
Έτσι θα αναζητήσουμε το α, ώστε το $f_{ελάχ.}$ να έχει μέγιστη τιμή.
Έστω $g(\alpha)=1-\alpha+\ln4\alpha,\ \alpha>0$
Η g είναι παραγωγίσιμη ως προς α στο διάστημα $(0,\ +\infty)$, με

$g'(\alpha)=(1-\alpha+\ln4\alpha)'=-1+\frac{1}{4\alpha}(4\alpha)'=-1+\frac{1}{4\alpha}4=-1+\frac{1}{\alpha}=\frac{1-\alpha}{\alpha},\ \alpha>0$

Έχουμε $g'(\alpha)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha}=0 \Leftrightarrow 1-\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=1$

Ακόμη: $g'(\alpha)>0 \Leftrightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha}>0\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}1-\alpha>0\Leftrightarrow\alpha<1$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\ 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,\ +\infty)$,
οπότε, παρουσιάζει μέγιστη τιμή για $\alpha=1$ την $g(1)=1-1+\ln4=\ln4$
Άρα το ελάχιστο της f έχει μέγιστη τιμή την $g(1)=\ln4$

γ) Έχουμε: $f(x)+\alpha\ge\ln(4\alpha e)$, άρα $f(x)\ge\ln e+\ln4\alpha-\alpha\Leftrightarrow f(x)\ge1-\alpha+\ln4\alpha$
$\overset{\alpha)}{\Leftrightarrow}f(x)\ge f\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)$, που ισχύει για κάθε $x>-1,\ \alpha>0$, αφού το $f\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)$ είναι
το ολικό ελάχιστο της f στο διάστημα $(-1,\ +\infty)$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΝΤΑΝΙΕΛ ΜΠΕΡΝΟΥΛΙ (1700-1782)

Σπουδαίος Ελβετός μαθηματικός και φυσικός, γιος και ανηψιός των επίσης διάσημων μαθηματικών Γιόχαν και Γιάκομπ Μπερνούλι αντίστοιχα. Επηρεασμένος από τον πατέρα του που διέπρεψε στον τομέα της ανάπτυξης του απειροστικού λογισμού αλλά και του θείου που συνεισέφερε στην πιθανοθεωρία τους χρήσιμους «αριθμούς του Μπερνούλι», ο Ντανιέλ Μπερνούλι επιδόθηκε στη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων. Διακρίθηκε στον τομέα αυτό, για την ακρίβεια εντυπωσίασε τον ευρωπαϊκό επιστημονικό κόσμο με συνέπεια να προταθεί για μέλος και στέλεχος διαφόρων Ακαδημιών. Προτίμησε να μεταβεί στη Ρωσία το 1725 και να αναλάβει έργο στην Ακαδημία Επιστημών της Αγίας Πετρούπολης μαζί με τον αδελφό του Νικολάους. Εκεί συναντήθηκε με τον ήδη διάσημο συμπατριώτη του μαθηματικό Όιλερ και δούλεψαν μαζί πάνω στη μαθηματική επιστήμη. Ο Μπερνούλι επέστρεψε στην Ελβετία το 1738 και ανέλαβε την έδρα των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Βασιλείας. Στο μεταξύ τα παράλληλα ενδιαφέροντά του για τις φυσικές επιστήμες και ιδιαίτερα τη μηχανική που είχαν καλλιεργηθεί στη Ρωσία βρήκαν διέξοδο στο συγκεκριμένο ακαδημαϊκό χώρο, πρόσφεραν στον ίδιο και την έδρα της Φυσικής μέχρι το θάνατό του και στην επιστήμη ένα θεμελιώδες για την ανάπτυξη της υδροδυναμικής έργο.