ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΤΑΣΟΣ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΥΡΙΑΖΗΣ
ΚΩΣΤΑΣ ΖΑΧΑΡΟΠΟΥΛΟΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΖΑΜΠΕΛΗΣ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΔΙΟΛΙΤΣΗΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ

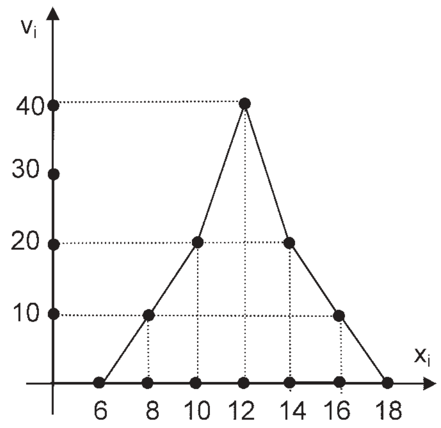
Αν Α,Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω τότε:

$P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-P(A'\cap B)$
$=1-P(A)+P(B)-(P(B)-P(A\cap B))$
$=1-P(A)+P(A\cap B)$.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Θέμα 1°

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το πολύγωνο συχνοτήτων που παρουσιάζει ομαδοποιημένα την αρτηριακή πίεση ατόμων ηλικίας από 40 έως 60 χρονών.



α) Να κάνετε τον πίνακα συχνοτήτων.

β) Να βρείτε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής (δίνεται ότι $\sqrt{4,8}\simeq 2,2$)
Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ) Υποθέτουμε ότι σε κάθε κλάση υπάρχει ίσος αριθμός αντρών και γυναικών, ομοιόμορφα κατανεμημένων κατά φύλλο ως προς την αρτηριακή πίεση. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο από το δείγμα. Να βρείτε την πιθανότητα:
i) Να είναι γυναίκα και να έχει πίεση τουλάχιστον 14.
ii) Να είναι γυναίκα ή να έχει πίεση τουλάχιστον 14.
iii) Να μην είναι γυναίκα και να έχει πίεση το πολύ 14.
iv) Να πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα ενδεχόμενα: γυναίκα, άτομο με πίεση τουλάχιστον 14.

Λύση

α) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι τα κέντρα των κλάσεων είναι: 8, 10, 12, 14, 16 και το πλάτος των κλάσεων ίσο με δύο. Συνεπώς ο ζητούμενος πίνακας είναι:

Αρτηριακή πίεση	Κέντρα κλάσεων x_i	Συχνότητα v_i
7 – 9	8	10
9 – 11	10	20
11 – 13	12	40
13 – 15	14	20
15 – 17	16	10
Σύνολο		100

β) $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}x_i v_i}{v}=\dfrac{80+200+480+280+160}{100}=\dfrac{1200}{100}=12.$

$s^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2 v_i}{v}=\dfrac{4^2.10+2^2.20+2^2.20+4^2.10}{100}=\dfrac{480}{100}=4,8$ άρα $s=\sqrt{4,8}\simeq 2,2.$

$CV=\dfrac{s}{\bar{x}}=\dfrac{2,2}{12}\cdot 100\%\simeq 18,3\%$. Άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές αφού $CV>10\%$.

γ) Έστω Γ το ενδεχόμενο: το άτομο που επιλέγουμε να είναι γυναίκα.
Επειδή σε κάθε κλάση έχουμε ίσο αριθμό ανδρών και γυναικών ισχύει $P(\Gamma)=\dfrac{50}{100}$.
Αν Α το ενδεχόμενο: το άτομο που επιλέγουμε έχει πίεση τουλάχιστον 14, τότε
$P(A)=\dfrac{10}{100}+\dfrac{10}{100}=\dfrac{20}{100}=20\ \%$

i) Το ενδεχόμενο: το άτομο που επιλέγουμε να είναι γυναίκα και να έχει πίεση τουλάχιστον 14 είναι $\Gamma\cap A$ και έχει πιθανότητα πραγματοποίησης $P(\Gamma\cap A)=\dfrac{10}{100}=10\%$ αφού, 20 άτομα έχουν πίεση τουλάχιστον 14, οπότε 10 θα είναι οι γυναίκες και 10 οι άντρες επειδή οι άντρες και οι γυναίκες είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στις κλάσεις.

ii) Το ενδεχόμενο: το άτομο που επιλέγουμε να είναι γυναίκα ή να έχει πίεση τουλάχιστον 14 είναι $\Gamma\cup A$ και έχει πιθανότητα
$P(\Gamma\cup A)=P(\Gamma)+P(A)-P(\Gamma\cap A)=\dfrac{50}{100}+\dfrac{20}{100}-\dfrac{10}{100}=\dfrac{60}{100}=60\%.$

iii) Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι $(\Gamma\cup A)'$ με πιθανότητα πραγματοποίησης:
$P((\Gamma\cup A)')=1-P(\Gamma\cup A)=1-\dfrac{60}{100}=\dfrac{40}{100}=40\%.$

iv) Το ενδεχόμενο: πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Γ, Α είναι το $(\Gamma-A)\cup(A-\Gamma)$, οπότε
$P\left[(\Gamma-A)\cup(A-\Gamma)\right]=P(\Gamma-A)+P(A-\Gamma)=P(\Gamma)-P(\Gamma\cap A)+P(A)-P(\Gamma\cap A)=$
$=P(\Gamma)+P(A)-2P(\Gamma\cap A)=\dfrac{50}{100}+\dfrac{20}{100}-2\cdot\dfrac{10}{100}=\dfrac{50}{100}=50\%,$
(αφού $(\Gamma-A)\cap(A-\Gamma)=\varnothing$).

Θέμα 2°

Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες πραγματοποίησης $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{11}{15}$.

α) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα.

β) Να δείξετε ότι:

i) $P(A\cup B)\geq\frac{11}{15}$. ii) $\frac{2}{15}\leq P(A\cap B)\leq\frac{2}{5}$. iii) $P(A'\cup B)\geq\frac{1}{3}$.

γ) Αν επιπλέον $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$, $A=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$, $B=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$ και $P(\omega_5)=2P(\omega_1)$ με ω_i, $i=1,2,3,4,5$ (στοιχειώδη) απλά ενδεχόμενα του Ω, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $\omega_1,\omega_4,\omega_5$ και Γ: ένα το πολύ από τα ενδεχόμενα Α, Β πραγματοποιείται.

Λύση

α) Έστω ότι τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα, τότε θα ισχύει:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\Leftrightarrow P(A\cup B)=\frac{2}{5}+\frac{11}{15}=\frac{17}{15}>1$ που είναι άτοπο.

Επομένως τα Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα, δηλαδή $A\cap B\neq\varnothing$.

β) i) Παρατηρούμε ότι $P(B)=\frac{11}{15}$, άρα η $P(A\cup B)\geq\frac{11}{15}\Leftrightarrow P(A\cup B)\geq P(B)$ που ισχύει αφού $B\subseteq A\cup B$.

ii) Ισχύει $A\cap B\subseteq A$ άρα $P(A\cap B)\leq P(A)\Leftrightarrow P(A\cap B)\leq\frac{2}{5}$.

Για την $P(A\cap B)\geq\frac{2}{15}$ εφαρμόζουμε προσθετικό νόμο και έχουμε

$$P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geq\frac{2}{15}\Leftrightarrow\frac{17}{15}-P(A\cup B)\geq\frac{2}{15}\Leftrightarrow P(A\cup B)\leq 1 \text{ που ισχύει.}$$

iii) $P(A'\cup B)\geq\frac{1}{3}\Leftrightarrow P(A')+P(B)-P(A'\cap B)\geq\frac{1}{3}\Leftrightarrow 1-P(A)+P(B)-P(A'\cap B)\geq\frac{1}{3}\Leftrightarrow$

$$1-\frac{2}{5}+\frac{11}{15}-P(A'\cap B)\geq\frac{1}{3}\Leftrightarrow P(A'\cap B)\leq\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\Leftrightarrow P(A'\cap B)\leq 1 \text{ που ισχύει.}$$

γ) $P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)+P(\omega_5)=1$ (1), $P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)=P(A)=\frac{2}{5}$ (2),

$P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=P(B)=\frac{11}{15}$ (3).

Οπότε:

(1) – (2): $P(\omega_4)+P(\omega_5)=\frac{3}{5}$ (4) και (1) – (3): $P(\omega_1)+P(\omega_5)=\frac{4}{15}$ (5).

Είναι $P(\omega_5)=2P(\omega_1)$ άρα από (5): $3P(\omega_1)=\frac{4}{15}\Leftrightarrow P(\omega_1)=\frac{4}{45}$

οπότε: $P(\omega_5)=\frac{8}{45}$ και από (4): $P(\omega_4)=\frac{3}{5}-\frac{8}{45}=\frac{19}{45}$.

Το ενδεχόμενο Γ είναι το $(A\cap B)'$ με $A\cap B=\{\omega_2,\omega_3\}$,

οπότε $P((A\cap B)')=1-P(A\cap B)=1-P(\omega_2)-P(\omega_3)$

$\Leftrightarrow P((A\cap B)')=P(\omega_1)+P(\omega_4)+P(\omega_5)=\frac{4}{45}+\frac{19}{45}+\frac{8}{45}=\frac{31}{45}$.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΚΕΝΕΘ ΤΖΟΖΕΦ ΑΡΡΟΟΥ (1921)

Αμερικανός μαθηματικός και οικονομολόγος που τιμήθηκε το 1972 με το Νόμπελ Οικονομίας. Τρία μεγάλα πανεπιστήμια των ΗΠΑ ήταν το πεδίο της επιστημονικής του δραστηριότητας. Το Κολούμπια, το Στάνφορντ και το Χάρβαρντ. Στο πρώτο εργάστηκε ως ερευνητής, ενώ στα άλλα δύο δίδαξε Οικονομία και Στατιστική. Η αναλυτική του θεωρία με τη χρήση πολλών μαθηματικών και στατιστικών μεθόδων συντέλεσε στην κατανόηση πλήθους οικονομικών αλλά και κοινωνικών μεγεθών και προβλημάτων του αιώνα που πέρασε. Ο Άρροου δεν περιορίστηκε στις μαθηματικές εξηγήσεις των προβλημάτων. Προχώρησε στη θεμελίωση οικονομικής άποψης για τη διάρθρωση των κοινωνιών, την «θεωρία του αδυνάτου» που σε πολιτική αντιστοίχιση απορρίπτει τα δικτατορικά μοντέλα και καλεί τα δημοκρατικά να δώσουν το βάρος στην έννοια της οργάνωσης των κοινωνιών, ώστε η απεικόνιση των προτιμήσεων των πολιτών να γίνεται όσο το δυνατόν ασφαλέστερα.