ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΡΗΓΑΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ

- Το εύρος R σε κανονική κατανομή ισούται(περίπου) με 6S, όπου S η τυπική απόκλιση ενός δείγματος.
- Έστω x_i, i=1,2,...,ν , ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής Χ. Αν καθεμιά από τις τιμές αυξηθεί κατά α%, τότε το δείγμα των τιμών που προκύπτει, έχει τον ίδιο συντελεστή μεταβολής με το αρχικό.

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ-ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Θέμα 1°

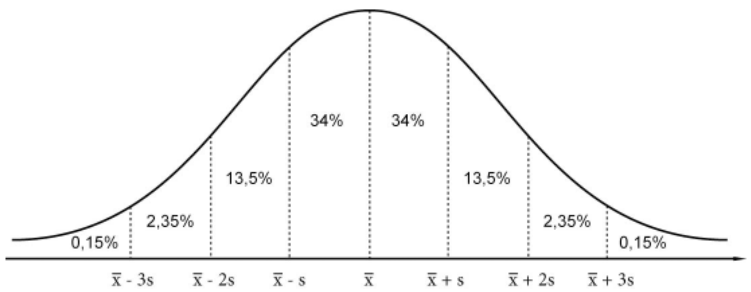
Δίνεται ένα δείγμα μεγέθους ν, $\nu \in \mathbb{N}^*$, του οποίου οι θετικών τιμών παρατηρήσεις $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$ ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s. Το 16% των παρατηρήσεων εμφανίζει τιμές κάτω από την τιμή 8 και επιπλέον ισχύει $\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 = 82\nu$

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s του δείγματος.
β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
γ) Να υπολογίσετε κατά προσέγγιση το εύρος καθώς και τη διάμεσο του δείγματος.
δ) Να προσδιορίσετε το μέγεθος ν του δείγματος όταν το πλήθος των παρατηρήσεων των οποίων η τιμή ξεπερνά την τιμή 11, είναι ίσο με 20
ε) Για $\nu = 800$, να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων που η τιμή τους είναι μικρότερη της τιμής 10

Δίνεται: $s^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}{\nu}\right]$

Λύση

α) Υπολογίζοντας τα ποσοστά των τιμών του δείγματος στα έξι επιμέρους διαστήματα έχουμε το επόμενο διάγραμμα συχνοτήτων.



Εφόσον το 16% των παρατηρήσεων εμφανίζει τιμές κάτω από την τιμή 8, από το διάγραμμα συχνοτήτων της κανονικής κατανομής προκύπτει ότι τιμή 8 αντιστοιχεί στην παρατήρηση με τιμή $\bar{x}-s$, δηλαδή θα ισχύει $\bar{x}-s=8 \Leftrightarrow s=\bar{x}-8$ (1)

Δίνεται: $s^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}{\nu}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} - \bar{x}^2$ (2)

Διαιρώντας τη σχέση που δίνεται από την υπόθεση με ν, παίρνουμε: $\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} = 82$ (3)

Αντικαθιστώντας τις (1) και (3) στην (2) προκύπτει:
$(\bar{x}-8)^2 = 82-\bar{x}^2 \Leftrightarrow \bar{x}^2-16\bar{x}+64 = 82-\bar{x}^2 \Leftrightarrow 2\bar{x}^2-16\bar{x}-18=0 \Leftrightarrow \bar{x}^2-8x-9=0$, άρα
$\bar{x}=9$ ή $\bar{x}=-1$ που απορρίπτεται διότι οι παρατηρήσεις έχουν θετικές τιμές.

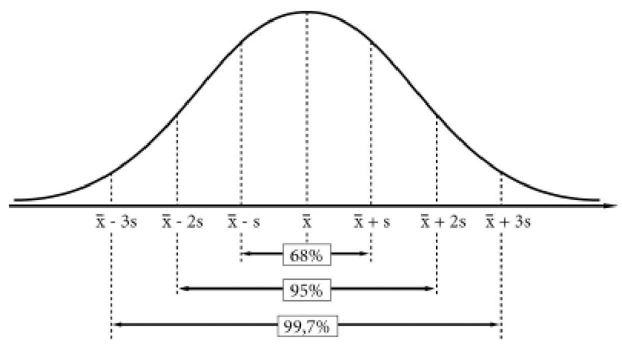
β) Για $\bar{x}=9$, είναι $s=1$, οπότε

$CV = \frac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow CV = \frac{1}{9}$. Όμως $\frac{1}{9} > \frac{1}{10}$ άρα $CV > \frac{1}{10} \Leftrightarrow CV > 10\%$, συνεπώς το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

γ) Το εύρος R στην κανονική κατανομή ισούται περίπου με 6s, άρα $R \simeq 6$ (αφού $s=1$)
Γνωρίζουμε πως στην κανονική κατανομή το 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες ή ίσες της μέσης τιμής και το 50% μεγαλύτερες ή ίσες της μέσης τιμής. Τότε προφανώς η διάμεσος συμπίπτει με τη μέση τιμή, άρα $\delta = \bar{x} = 9$

δ) Απεικονίζοντας γραφικά τις συχνότητες (κανονική κατανομή), έχουμε το διπλανό σχήμα στο οποίο:
Παρατηρούμε ότι το ποσοστό των παρατηρήσεων με τιμές που ξεπερνούν την τιμή 11, είναι: 2,5%

Άρα έχουμε $\nu = \frac{20 \cdot 100}{2,5} = 800$



ε) Με τιμή μικρότερη της τιμής 10, είναι σε ποσοστό το $50\% + \frac{68}{2}\% = 84\%$ των παρατηρήσεων του δείγματος.

Επομένως το ζητούμενο πλήθος των παρατηρήσεων είναι $\frac{84}{100} \cdot 800 = 672$

Θέμα 2^o

Στον διπλανό πίνακα δίνεται η κατανομή των καταθέσεων των κατοίκων μιας πόλης. Τα ποσά είναι σε δεκάδες χιλιάδες € και οι συχνότητες εκφράζουν τους καταθέτες σε χιλιάδες.

Καταθέσεις κλάσεις	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i
0 – 20		10
20 – 40		20
40 – 60		40
60 – 80		20
80 – 100		10
ΣΥΝΟΛΟ :		100

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος των καταθέσεων.
β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
γ) Αν η διακύμανση του δείγματος είναι 100, ποια θα πρέπει να είναι η ελάχιστη μέση τιμή ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.
δ) Όταν ξέσπασε οικονομική κρίση, οι καταθέσεις ελαττώθηκαν κατά 75% και οι αντίστοιχοι καταθέτες κατά 50%. Να κατασκευάσετε πίνακα στον οποίο να φαίνονται οι καταθέσεις και οι καταθέτες των νέων δεδομένων. Να υπολογίσετε βάσει του πίνακα την διακύμανση και τον συντελεστή μεταβολής του νέου δείγματος. Να συγκρίνετε την ομοιογένεια των δύο δειγμάτων.

Λύση

α)

Καταθέσεις	x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$	$v_i(x_i - \bar{x})^2$
0 – 20	10	10	100	16000
20 – 40	30	20	600	8000
40 – 60	50	40	2000	0
60 – 80	70	20	1400	8000
80 – 100	90	10	900	16000
ΣΥΝΟΛΟ		100	5000	48000

Η μέση τιμή δίνεται από τον τύπο: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot v_i}{v} \Leftrightarrow$

$\bar{x} = \frac{5000}{100} \Leftrightarrow \bar{x} = 50$ χιλιάδες €

Η διακύμανση ισούται με: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} v_i(x_i - \bar{x})^2}{v} \Leftrightarrow s^2 = \frac{48000}{100} \Leftrightarrow s^2 = 480$, οπότε η τυπική απόκλιση είναι:

$s = \sqrt{480}$ χιλιάδες €

β) Ο συντελεστής μεταβολής ισούται με: $CV = \frac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow CV = \frac{\sqrt{480}}{50} \Leftrightarrow CV = \frac{2\sqrt{30}}{25}$

Είναι $\frac{2\sqrt{30}}{25} > \frac{1}{10}$,(αφού $20\sqrt{30} > 25$), άρα $CV > 10\%$, οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

γ) Για να είναι το δείγμα ομοιογενές θα πρέπει να ισχύει $CV \le 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} \le 0{,}1 \Leftrightarrow \bar{x} \ge \frac{10}{0{,}1} \Leftrightarrow \bar{x} \ge 100$, άρα η ελάχιστη μέση τιμή είναι 100 χιλιάδες €

δ) Στο διπλανό πίνακα φαίνονται τα δεδομένα που προέκυψαν μετά την οικονομική κρίση.
Η μέση τιμή του δείγματος ισούται με:

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot v_i}{v} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{625}{50} \Leftrightarrow \bar{x} = 12{,}5$ χιλιάδες €

Καταθέσεις	x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$	$v_i(x_i - \bar{x})^2$
0 – 5	2,5	5	12,5	500
5 – 10	7,5	10	75	250
10 – 15	12,5	20	250	0
15 – 20	17,5	10	175	250
20 – 25	22,5	5	112,5	500
ΣΥΝΟΛΟ:		50	625	1500

Η διακύμανση ισούται με: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} v_i(x_i - \bar{x})^2}{v}$

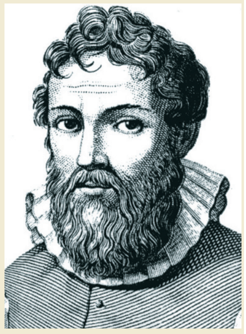
$\Leftrightarrow s^2 = 30$, οπότε η τυπική απόκλιση είναι: $s = \sqrt{30}$ χιλιάδες €. Ο συντελεστής μεταβολής ισούται με:

$CV = \frac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow CV = \frac{\sqrt{30}}{12{,}5}$. Είναι $\frac{\sqrt{30}}{12{,}5} > \frac{1}{10}$(αφού $10\sqrt{30} > 12{,}5$), άρα $CV > 10\%$, οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές. Αν CV', ο συντελ. μεταβολής του δείγματος μετά την κρίση, τότε $CV' = \frac{\sqrt{30}}{12{,}5} = \frac{2\sqrt{30}}{25} = CV$

Συνεπώς τα δύο δείγματα έχουν την ίδια ομοιογένεια.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΦΡΑΝΣΟΥΑ ΒΙΕΤ (1540-1603)



Γάλλος μαθηματικός, ο κορυφαίος αλγεβριστής της εποχής του. Αν και οι κύριες σπουδές του ήταν νομικές, όταν καταπιάστηκε με τα μαθηματικά θαυματούργησε. Το πρώτο του κατόρθωμα ήταν η αποκρυπτογράφηση του βασισμένου σε ένα περίπλοκο σύστημα αριθμών και γραμμάτων ισπανικού κώδικα αλληλογραφίας, γεγονός που βοήθησε σημαντικά τη Γαλλία και τον Ερρίκο Δ΄ στον πόλεμο με την Ισπανία. Το επιστημονικό σύγγραμμα του Βιέτ «Εισαγωγή στην αναλυτική τέχνη» είναι από τα πρώτα άρτια μνημεία του αλγεβρικού λογισμού. Ο Βιέτ υπήρξε ο πρώτος μαθηματικός που χρησιμοποίησε σε ευρεία κλίμακα τα γράμματα για να εκφράσει αριθμητικές ποσότητες. Το 1593 ο Βιέτ κατάφερε να εκφράσει τον αριθμό π με τη βοήθεια ενός απειρογινόμενου και τον υπολόγισε με ακρίβεια εννέα δεκαδικών ψηφίων, βελτιώνοντας έτσι το σχετικό αποτέλεσμα του Αρχιμήδη. Συμπερασματικά ο Βιέτ υπήρξε ο πρώτος που υποκατέστησε στις μαθηματικές του αποδείξεις τις γεωμετρικές κατασκευές με αλγεβρικές διαδικασίες.