ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΤΑΣΟΣ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΥΡΙΑΖΗΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και έχει μέγιστο (ελάχιστο) στο $x_0 \in \Delta$ το $f(x_0)<0\,(f(x_0)>0)$, τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει: $f(x)<0\,(f(x)>0)$.

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Θέμα 1°

Έστω $t_1, t_2, \dots, t_\nu$ ένα δείγμα παρατηρήσεων (μιας μεταβλητής X) μεγέθους $\nu > 1$ με μέση τιμή $\bar{x}$ και τέτοιο, ώστε $t_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, \nu$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = -\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2 x^2 + 32\nu\left[\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2\right]\cdot x$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει μέγιστο στο $x_o = 1$.

α) Να υπολογίσετε τον CV του δείγματος.

β) Αν επιπλέον ισχύουν $F_{i-1}^3 + 0,52(2F_i - 1)^3 = \dfrac{N_i^2 - 31N_i + 1000}{1000}$ (1) για $i = 2, \dots, \nu$ και $F_{\nu-1} = 0,8$ να βρείτε το ν.

γ) Σε καθεμιά από τις παρατηρήσεις του δείγματος προσθέτουμε 30 μονάδες και έτσι το νέο δείγμα έχει $CV' = 0,1$. Να υπολογίσετε την $\bar{x}$ του αρχικού δείγματος καθώς και την τυπική απόκλιση s αυτού.

δ) Κάποιες από τις παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος αυξάνονται κατά 16 μονάδες, με συνέπεια την αύξηση της αρχικής $\bar{x}$ κατά 50%. Να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων που αυξήθηκαν.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με $f'(x) = \left[-\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2 x^2\right]' + \left\{32\nu\left[\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2\right]\cdot x\right\}' =$

$$= -2\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2 x + 32\nu\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2, \text{ οπότε: } f'(x) = 0 \overset{t_i>0}{\Leftrightarrow} x = \frac{16\nu\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2}{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2} \Leftrightarrow x = \frac{16\nu^2 s^2}{\nu^2\bar{x}^2} \Leftrightarrow x = 16\left(\frac{s}{\bar{x}}\right)^2,$$

αφού $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2 = \nu s^2$ και $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\nu} t_i = \nu\bar{x}$.

Ακόμη $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x < 16\left(\dfrac{s}{\bar{x}}\right)^2$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x > 16\left(\dfrac{s}{\bar{x}}\right)^2$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα όταν $x \le 16\left(\dfrac{s}{\bar{x}}\right)^2$ και γνησίως φθίνουσα όταν $x \ge 16\left(\dfrac{s}{\bar{x}}\right)^2$, άρα παρουσιάζει μέγιστο (ολικό) στο $x_o = 16\left(\dfrac{s}{\bar{x}}\right)^2$.

Από υπόθεση όμως $x_o = 1$ και συνεπώς:

$$16\left(\frac{s}{\bar{x}}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{s}{\bar{x}}\right)^2 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow (CV)^2 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow CV = \frac{1}{4} = 0,25.$$

β) Αν στη σχέση (1) της υπόθεσης θέσουμε $i = \nu$ παίρνουμε:

$F_{\nu-1}^3 + 0,52(2F_\nu - 1)^3 = \dfrac{N_\nu^2 - 31N_\nu + 1000}{1000}$ που επειδή $F_{\nu-1} = 0,8$, $F_\nu = 1$, $N_\nu = \nu$, γίνεται

$$(0,8)^3 + 0,52(2\cdot 1 - 1)^3 = \frac{\nu^2 - 31\nu + 1000}{1000} \Leftrightarrow 0,512 + 0,52 = \frac{\nu^2 - 31\nu + 1000}{1000} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \nu^2 - 31\nu + 1000 = 1032 \Leftrightarrow \nu^2 - 31\nu - 32 = 0$ που έχει ρίζες ρίζες $\nu = -1$ (απορ.), $\nu = 32$ (δεκτή).

Οπότε το μέγεθος του δείγματος είναι $\nu = 32$.

γ) $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow s = \bar{x}\cdot CV$ (2). Οι νέες παρατηρήσεις είναι $y_i = x_i + 30$ οπότε $\bar{y} = \bar{x} + 30$ και $s_y = s$, άρα

$$CV' = \frac{s_y}{\bar{y}} \Leftrightarrow 0,1 = \frac{s}{\bar{x}+30} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 0,1\bar{x} + 3 = \bar{x}\cdot CV \Leftrightarrow 0,1\bar{x} + 3 = 0,25\bar{x} \Leftrightarrow 0,15\bar{x} = 3 \Leftrightarrow \bar{x} = 20 \text{ και}$$

$s = 20\cdot 0,25 = 5$.

δ) Η μέση τιμή $\bar{x}$ αυξήθηκε κατά 50% άρα η νέα μέση τιμή $\bar{z}$ των παρατηρήσεων z_i είναι

$$\bar{z} = \bar{x} + 0,5\bar{x} \Leftrightarrow \bar{z} = 1,5\bar{x} \Leftrightarrow \bar{z} = 1,5\cdot 20 = 30. \text{ Ισχύει } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{32} t_i}{32} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{32} t_i = 32\bar{x} = 32\cdot 20 = 640.$$

Ακόμη $\bar{z} = \dfrac{\sum_{i=1}^{32} t_i + 16\kappa}{32}$,όπου κ το πλήθος των παρατηρήσεων που αυξήθηκαν, επομένως θα ισχύει:

$\dfrac{640+16\kappa}{32} = 30 \Leftrightarrow 16\kappa = 320 \Leftrightarrow \kappa = 20$.

Έτσι οι 20 από τις 32 παρατηρήσεις του δείγματος είναι αυτές που αυξήθηκαν κατά 16 μονάδες.

Θέμα 2°

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{2-x}{\ell nx}$ και $g(x) = x - 2 - x\ell nx$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f, g.

β) Να εξετάσετε την g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατά της (αν υπάρχουν).

γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα (0, 1), (1, +∞) και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στην καμπύλη της f στο σημείο Α(e, f(e)).

δ) Έστω Ω δειγματικός χώρος (ενός πειράματος τύχης) που αποτελείται από κ + 4 ($\kappa \in \mathbb{N}^*$) σε πλήθος ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.
Αν Μ, Λ ενδεχόμενα του Ω με πλήθος στοιχείων Ν(Μ) = 2κ – 1, Ν(Λ) = 3 – κ αντιστοίχως και τέτοια, ώστε f(P(M)) > f(P(Λ)), να βρείτε τις πιθανότητες P(M), P(Λ).

Λύση

α) Για την f πρέπει $x > 0$ και $\ell nx \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, άρα το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο $(0, 1)\cup(1, +\infty)$.
Για την g πρέπει $x > 0$, άρα το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο $(0, +\infty)$.

β) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = (x-2-x\ell nx)' = 1-(x\ell nx)' = 1-\ell nx - x\dfrac{1}{x} = -\ell nx$.

Είναι $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ell nx = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ell nx < 0 \Leftrightarrow x < 1$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1], γνησίως φθίνουσα στο [1, +∞) και επομένως παρουσιάζει μέγιστο (ολικό) στο $x_o = 1$ το g(1) = – 1.

γ) • Για $x\in(0, 1)\cup(1, +\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \left(\frac{2-x}{\ell nx}\right)' = \frac{(2-x)'\ell nx-(2-x)(\ell nx)'}{(\ell nx)^2} = \frac{-\ell nx-(2-x)\frac{1}{x}}{(\ell nx)^2} = \frac{x-2-x\ell nx}{x(\ell nx)^2},\ \text{άρα}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x\ell n^2x}(x-2-x\ell nx)\ (1).$$

Για την g ισχύει $g(x) \leq -1$ (ερώτ. β) για κάθε $x > 0$ οπότε $g(x) < -1$ για κάθε $x > 0, x \neq 1$.

Από (1) έχουμε $f'(x) = \dfrac{1}{x\ell n^2x}g(x)$, $x > 0, x \neq 1$ και επομένως $f'(x) < 0$ αφού $g(x) < -1 < 0$ και $x\ell n^2x > 0$ για κάθε $x > 0, x \neq 1$.

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0, 1) όπως και στο (1, +∞).

• Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Α είναι της μορφής (ε): y = αx + β με $\alpha = f'(e) = \dfrac{e-2-e\ell ne}{e\ell n^2e}$,

δηλαδή $\alpha = -\dfrac{2}{e}$. Όμως $A\in(\varepsilon)$, άρα $f(e) = -\dfrac{2}{e}e+\beta \Leftrightarrow \dfrac{2-e}{\ell ne} = -2+\beta \Leftrightarrow \beta = 4-e$.

Τελικά η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση (ε): $y = -\dfrac{2}{e}x + 4 - e$.

δ) Είναι f(P(M)) > f(P(Λ)) ⇔ P(M) < P(Λ) (2), γιατί αν P(M) ≥ P(Λ) τότε f(P(M)) ≤ f(P(Λ)) (αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα (ερώτ. γ) στο διάστημα (0, 1) και P(M), P(Λ) δεν ανήκουν στο (1, +∞) ως πιθανότητες), άτοπο από υπόθεση.

Έχουμε $P(M) = \dfrac{N(M)}{N(\Omega)} = \dfrac{2\kappa-1}{\kappa+4}$ και $P(\Lambda) = \dfrac{N(\Lambda)}{N(\Omega)} = \dfrac{3-\kappa}{\kappa+4}$ άρα από (2) παίρνουμε

$$\frac{2\kappa-1}{\kappa+4} < \frac{3-\kappa}{\kappa+4} \overset{\kappa>0}{\Leftrightarrow} 3\kappa < 4 \Leftrightarrow \kappa < \frac{4}{3} \text{ με } \kappa \in \mathbb{N}^*.$$

Συνεπώς κ = 1 και έτσι $P(M) = \dfrac{1}{5}$, $P(\Lambda) = \dfrac{2}{5}$.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΧΕΡΜΑΝ ΒΑΪΛ (1885-1955)

Γερμανός μαθηματικός από τους πολλούς που αναγκάστηκαν να εγκαταλείψουν την πατρίδα τους αμέσως μετά την επικράτηση των ναζί. Πριν από το διωγμό του, μεταξύ 1930 και 1933, δίδασκε στο πανεπιστήμιο του Γκέτινγκεν, όπου είχε σπουδάσει και διακρινόταν για την ποικίλη ερευνητική ενασχόλησή του γύρω από μαθηματικά προβλήματα τόσο στην άλγεβρα και τη γεωμετρία όσο και στη φυσική. Η πανεπιστημιακή του καριέρα είχε αρχίσει από το 1913 και συγκεκριμένα από το πανεπιστήμιο της Ζυρίχης. Μετά τη φυγή του στην Αμερική βρέθηκε να διδάσκει στο πανεπιστήμιο του Πρίνστον μέχρι το θάνατό του. Το θεωρητικό, συγγραφικό του έργο σημάδεψε η μελέτη γύρω από την διαφορική γεωμετρία, που κατέληξε στην οριστική διαμόρφωση της έννοιας «επιφάνεια του Ρίμαν». Προήγαγε παράλληλα με τις μελέτες του την αριθμοθεωρία, τη θεωρία της σχετικότητας και την κβαντομηχανική, αφού δεν άφησε έξω από το πεδίο του τη μαθηματική φυσική.