ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΤΑΣΟΣ
ΝΙΚΟΣ ΚΟΚΟΛΗΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ

Αν f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ και $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε θα ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$, **αφού** $\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx \geq 0$.

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Θέμα 1°

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-x}{x-1}=2 \text{ και } f(2008)=1.$$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.

β) Να αποδείξτε ότι η ευθεία $y=x-1$ τέμνει την C_f σ΄ ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_o\in(1, 2008)$.

γ) Αν η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:
i) Υπάρχει ένα ακριβώς $\xi\in(1, 2008)$ στο οποίο η f παρουσιάζει μέγιστο
ii) $2\int_0^1 f(x)dx\leq-1$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της M θα έχει εξίσωση
$y-f(1)=f'(1)(x-1)$.
Θα υπολογίσουμε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.
Η f είναι συνεχής στο $x_o=1$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$.
Ισχύει ακόμη ότι: $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-x}{x-1}=2$ (1). Θέτουμε $g(x)=\frac{f(x)-x}{x-1}$, για $x\neq1$, οπότε από (1) έχουμε $\lim_{x\to1}g(x)=2$.
Επίσης $f(x)-x=g(x)(x-1) \Leftrightarrow f(x)=g(x)(x-1)+x$, $x\neq1$, συνεπώς
$\lim_{x\to1}[g(x)(x-1)+x]=\lim_{x\to1}g(x)\lim_{x\to1}(x-1)+\lim_{x\to1}x=0+1=1$.
Άρα $\lim_{x\to1}f(x)=1$, οπότε και $f(1)=1$.

Είναι $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)+x-x-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-x}{x-1}+\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1}\overset{(1)}{=}2+1=3$,
Συνεπώς $f'(1)=3$.
Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$ είναι:
$y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-1=3(x-1) \Leftrightarrow y=3x-2$.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $x_o\in(1, 2008)$ για την εξίσωση
$f(x)=x-1 \Leftrightarrow f(x)-x+1=0$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x+1$, $x\in[1, 2008]$.

- Η h είναι συνεχής στο $[1, 2008]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
- $h(1)h(2008)=(f(1)-1+1)(f(2008)-2008+1)=1\cdot(-2006)=-2006<0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_o\in(1, 2008)$ για την εξίσωση:
$h(x)=0 \Leftrightarrow f(x)-x+1=0$.

γ) i) Η f είναι κοίλη, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα $\xi\in(1, 2008)$.

- Η f είναι συνεχής στο $[1, 2008]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2008)$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- $f(1)=f(2008)=1$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα $\xi\in(1, 2008)$ για την εξίσωση $f'(x)=0$ η οποία είναι και μοναδική αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα.
Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	1		ξ		2008
$f'(x)$		+	0	−	
f		↗		↘	

Αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ ισχύει:
Για $1<x<\xi$ είναι $f'(x)>f'(\xi)=0$.
Για $\xi<x<2008$ είναι $0=f'(\xi)>f'(x)$. Άρα στο $x=\xi$ η f παρουσιάζει μέγιστο.
ii) Αφού η C_f στρέφει τα κοίλα κάτω τότε η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την εξίσωση της

εφαπτομένης της (με εξαίρεση το σημείο επαφής) σε οποιοδήποτε σημείο της, οπότε:
$f(x) \le 3x - 2 \Leftrightarrow (3x-2) - f(x) \ge 0$ και επομένως θα ισχύει ότι

$$\int_0^1 (3x-2-f(x))dx \ge 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (3x-2)dx - \int_0^1 f(x)dx \ge 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx \le \left[\frac{3x^2}{2} - 2x\right]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx \le \frac{3}{2} - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x)dx \le -1.$$

Θέμα 2^o

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \int_1^x e^t \cdot \ell nt\,dt,\ x \ge 1$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \int_x^{x+1} e^t \cdot \ell nt\,dt$.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\int_x^{x+1} e^t \cdot \ell nt\,dt - x\right)$.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e \frac{f''(x)}{e^x}dx$.

Λύση

α) Η συνάρτηση $h(x) = e^x \ell nx,\ x \ge 1$ είναι συνεχής οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με $f'(x) = e^x \ell nx$.
Για $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ (f συνεχής στο $[1, +\infty)$).
Είναι $f''(x) = e^x \ell nx + e^x \frac{1}{x} > 0$, για $x > 1$, οπότε η f είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$ (f συνεχής στο $[1, +\infty)$).

β) Είναι $\int_x^{x+1} h(t)dt = \int_x^1 h(t)dt + \int_1^{x+1} h(t)dt = -\int_1^x h(t)dt + \int_1^{x+1} h(t)dt = f(x+1) - f(x)$.

- Η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ άρα και στο $[x, x+1]$, $x > 1$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ άρα και στο $(x, x+1)$, $x > 1$.

Οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, x+1)$, τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x) = \int_x^{x+1} h(t)dt = \int_x^{x+1} e^t \cdot \ell nt\,dt.$$

γ) Είναι $x < \xi < x+1$ και η f' γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ (αφού $f''(x) > 0$, για $x > 1$). Οπότε έχουμε:

$$f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1) \overset{\beta)}{\Leftrightarrow} e^x \ell nx < \int_x^{x+1} e^t \cdot \ell nt\,dt < e^{x+1}\ell n(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x \ell nx - x < \int_x^{x+1} e^t \cdot \ell nt\,dt - x < e^{x+1}\ell n(x+1) - x.$$ Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty}(e^x \ell nx - x) \overset{+\infty-(+\infty)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty}\left[x\left(\frac{e^x}{x}\ell nx - 1\right)\right]$.

Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{e^x}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, άρα $\lim\limits_{x \to +\infty}(e^x \ell nx - x) = +\infty$. Για το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty}(e^{x+1}\ell n(x+1) - x)$ θέτουμε u=x+1, οπότε το προηγούμενο όριο γράφεται: $\lim\limits_{u \to +\infty}(e^u \ell nu - u + 1) = +\infty$.

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής: $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\int_x^{x+1} e^t \cdot \ell nt\,dt - x\right) = +\infty$.

δ)
$$\int_1^e \frac{f''(x)}{e^x}dx \overset{\alpha)}{=} \int_1^e \frac{e^x \ell nx + e^x \frac{1}{x}}{e^x}dx = \int_1^e \left(\ell nx + \frac{1}{x}\right)dx = \int_1^e (x)'\ell nx\,dx + \int_1^e \frac{1}{x}dx = [x\ell nx]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx + [\ell nx]_1^e =$$
$$= e - 0 - [x]_1^e + 1 - 0 = e - e + 1 + 1 = 2.$$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΜΠΕΡΝΑΡΝΤ ΜΠΟΛΤΣΑΝΟ (1781-1848)

Σπουδαίος Τσέχος θεολόγος, φιλόσοφος και μαθηματικός, ιταλικής καταγωγής, ιδιαίτερα γνωστός για τη συμβολή του στη θεμελίωση της μαθηματικής ανάλυσης πάνω σε στερεές βάσεις. Σπούδασε μαθηματικά και θεολογία στο Πανεπιστήμιο της Πράγας και το 1805 ανέλαβε στο ίδιο Πανεπιστήμιο την έδρα της Φιλοσοφίας της Θρησκείας. Τα φιλοσοφικά ενδιαφέροντά του σχετικά με τη λειτουργία της σκέψης και την ουσία της γνώσης, τον οδήγησαν να ασχοληθεί με τις αρχές που διέπουν τα μαθηματικά. Η συμβολή του υπήρξε καθοριστική στον κλάδο της μαθηματικής ανάλυσης, αλλά, οι ιδέες του αναγνωρίστηκαν πλατιά και αξιοποιήθηκαν μόνο μετά το θάνατό του. Μεταξύ άλλων, σημαντικό επίτευγμά του υπήρξε το γνωστό «θεώρημα του Μπολτσάνο», όπως επίσης, και η παρουσίαση της εξίσωσης συνεχούς καμπύλης, η οποία στερείται εφαπτομένης. Αξιοσημείωτο είναι πως μεταγενέστεροι μελετητές που ενέσκηψαν στα γραπτά του, διαπίστωσαν ότι είχε προχωρήσει σε έννοιες και θεωρήματα, τα οποία διατύπωσαν αργότερα ανεξάρτητα από αυτόν οι Κάντορ και Βάιερστρας και τα οποία αποδόθηκαν σε αυτούς. Σήμερα θεωρείται ότι είναι ο πρώτος, που ενστερνίστηκε συνειδητά την έννοια του ενεστωτικού απείρου. Τα μαθηματικά του «Άπαντα» εκδόθηκαν στην Πράγα σε δύο τόμους (1930 – 31), ενώ το σύνολο του ογκώδους έργου του άρχισε να εκδίδεται το 1969.