ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΔΙΟΛΙΤΣΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΟΡΙΛΗΣ

- Η πιθανότητα: Η παρατήρηση t_i μιας μεταβλητής Χ, να βρίσκεται σε κάποια από τις κλάσεις μέσα στις οποίες έχουν κατανεμηθεί ομοιόμορφα οι παρατηρήσεις t_i, $i=1,2,...,\nu$, ισούται με την σχετική συχνότητα f_i της αντίστοιχης κλάσης.

- Ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{\nu}\left(t_i^2-2t_i\bar{x}+\bar{x}^2\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2-2\bar{x}\sum_{i=1}^{\nu}t_i+\nu\bar{x}^2=$$

$$\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2-2\nu\bar{x}^2+\nu\bar{x}^2=\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2-\nu\bar{x}^2$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

Ο αριθμός των βιβλίων που διαβάζουν οι μαθητές της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου κατά τη διάρκεια ενός χρόνου έχει ομαδοποιηθεί (ομοιόμορφα κατανεμημένες παρατηρήσεις) σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους. Αν $\nu_3=4\nu_5$ και η μέση τιμή ισούται με $\bar{x}=7{,}2$ βιβλία, τότε:

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις [-,-)	Κέντρα κλάσεων x_i	ν_i	N_i	f_i	$F_i\%$
-			50		
-	6			0,4	
-					
-	14				
[-,-]			200		
Σύνολο					

β) Πόσοι μαθητές διαβάζουν λιγότερα από 11 βιβλία;

γ) Σε ποιο διάστημα κυμαίνεται ο αριθμός των περισσότερων βιβλίων που διαβάζουν 15 μαθητές;

δ) Ποια η πιθανότητα ένας μαθητής να διαβάζει το πολύ 6 βιβλία;

Λύση

α) Οι κλάσεις είναι της μορφής [α, α + c), [α + c, α + 2c), … όπου c το πλάτος αυτών. Επομένως θα ισχύουν οι σχέσεις:

$\dfrac{(\alpha+c)+(\alpha+2c)}{2}=6$ και $\dfrac{(\alpha+3c)+(\alpha+4c)}{2}=14$ (αφού τα κέντρα x_i των κλάσεων είναι $x_2=6$ και $x_4=14$).

Οπότε από το σύστημα των εξισώσεων: $\begin{cases}2\alpha+3c=12\\2\alpha+7c=28\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+3c=12\\4c=16\end{cases}$, έχουμε α = 0, c = 4,

συνεπώς οι κλάσεις είναι: [0, 4), [4, 8), [8, 12), [12,16), [16, 20] και τα κέντρα αυτών: $x_1=2, x_2=6, x_3=10, x_4=14, x_5=18$, αντιστοίχως.

Επίσης, $\nu=N_5=200$, $\nu_1=N_1=50$ και $f_2=\dfrac{\nu_2}{\nu}$, άρα $0{,}4=\dfrac{\nu_2}{200}\Leftrightarrow\nu_2=80$

Είναι, $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}x_i\nu_i}{\nu}\Leftrightarrow 7{,}2=\dfrac{2\cdot50+6\cdot80+10\cdot\nu_3+14\cdot\nu_4+18\cdot\nu_5}{200}\Leftrightarrow 1440=580+10\nu_3+14\nu_4+18\nu_5$, (1)

Αλλά ισχύει $\nu_3=4\nu_5$, οπότε η σχέση (1) γράφεται:

$1440=580+40\nu_5+14\nu_4+18\nu_5\Leftrightarrow 860=14\nu_4+58\nu_5\Leftrightarrow 430=7\nu_4+29\nu_5$, (2)

Ακόμη ισχύει: $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu_5=\nu \Leftrightarrow 50+80+4\nu_5+\nu_4+\nu_5=200\Leftrightarrow\nu_4+5\nu_5=70$, (3)

Έτσι, από τις σχέσεις (2), (3) έχουμε το σύστημα: $\begin{cases}7\nu_4+29\nu_5=430\\\nu_4+5\nu_5=70\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\nu_4=20\\\nu_5=10\end{cases}$, άρα $\nu_3=4\nu_5=40$

και από τις σχέσεις για τις σχετικές συχνότητες, αθροιστικές συχνότητες (απόλυτες – σχετικές):

$f_i=\dfrac{\nu_i}{\nu}$, $N_i=N_{i-1}+\nu_i$, $F_i\%=F_{i-1}\%+f_i\%$, κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις [-,-)	Κέντρα κλάσεων x_i	ν_i	N_i	f_i	$F_i\%$
[0, 4)	2	50	50	0,25	25
[4, 8)	6	80	130	0,4	65
[8, 12)	10	40	170	0,2	85
[12, 16)	14	20	190	0,1	95
[16, 20]	18	10	200	0,05	100
Σύνολο		200		1	

β) Λόγω ομοιομορφίας της κατανομής στις κλάσεις, το ζητούμενο πλήθος των μαθητών θα είναι:

$\nu_1+\nu_2+\dfrac{3\nu_3}{4}=50+80+30=160$, αφού το εύρος από 8 έως 11 βιβλία καλύπτει τα $\dfrac{3}{4}$ της τρίτης κλάσης η οποία έχει συχνότητα $\nu_3=40$

γ) Πάλι λόγω ομοιομορφίας της κατανομής ο αριθμός των περισσότερων βιβλίων που διαβάζουν 15 μαθητές κυμαίνεται στο διάστημα [15, 20], αφού: 10 μαθητές διαβάζουν από 16 έως και 20 βιβλία το χρόνο και 5 μαθητές (αντιστοιχία στο $\dfrac{1}{4}$ της τέταρτης κλάσης [12, 16)) 15 βιβλία το χρόνο.

δ) Η ζητούμενη πιθανότητα ένας μαθητής να διαβάζει το πολύ 6 βιβλία το χρόνο είναι

$f_1+\dfrac{1}{2}f_2=0{,}25+0{,}2=0{,}45$, αφού: ο αριθμός από 0 έως 6 βιβλία καλύπτεται από ολόκληρη την πρώτη κλάση [0, 4) με $f_1=0{,}25$ και από το $\dfrac{1}{2}$ της δεύτερης κλάσης [4, 8) με $f_2=0{,}4$ (ομοιόμορφη κατανομή)

Θέμα 2°

Έστω $t_1, t_2, ..., t_\nu$ οι τιμές μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν με μέση τιμή $\overline{x}$ και τυπική απόκλιση s

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = (2t_1 - x)^4 + (2t_2 - x)^4 + ... + (2t_\nu - x)^4$, $x \in \mathbb{R}$ και την $g(x) = f'(x)$, τέτοια ώστε $g''(6\overline{x}) = 192$

α) Να δείξετε ότι $g'(2\overline{x}) = 48\nu s^2$

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum\limits_{i=1}^{\nu} t_i$

γ) Να βρείτε το είδος του ακροτάτου της g' και να υπολογίσετε το μέγεθος ν του δείγματος, όταν η συνάρτηση g' έχει ακρότατη τιμή ίση με 90 και $s = \frac{1}{4}$

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ε στη καμπύλη της g' στο σημείο $M(0, g'(0))$, είναι:

$$y = -96x + 48\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2$$

Λύση

α) Είναι $f(x) = (2t_1 - x)^4 + (2t_2 - x)^4 + ... + (2t_\nu - x)^4$, $x \in \mathbb{R}$, άρα:

$g(x) = f'(x) = -4(2t_1 - x)^3 - 4(2t_2 - x)^3 - ... - 4(2t_\nu - x)^3$, οπότε

$g'(x) = 12(2t_1 - x)^2 + 12(2t_2 - x)^2 + ... + 12(2t_\nu - x)^2 = 12\sum\limits_{i=1}^{\nu}(2t_i - x)^2$. Συνεπώς:

$g'(2\overline{x}) = 12\sum\limits_{i=1}^{\nu}(2t_i - 2\overline{x})^2 = 12\sum\limits_{i=1}^{\nu}4(t_i - \overline{x})^2 = 48\sum\limits_{i=1}^{\nu}(t_i - \overline{x})^2$, (1), όπου όμως ισχύει $s^2 = \frac{1}{\nu}\sum\limits_{i=1}^{\nu}(t_i - \overline{x})^2$ και

επομένως $\nu s^2 = \sum\limits_{i=1}^{\nu}(t_i - \overline{x})^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} g'(2\overline{x}) = 48\nu s^2$

β) Έχουμε $g'(x) = 12(2t_1 - x)^2 + 12(2t_2 - x)^2 + ... + 12(2t_\nu - x)^2$, άρα:

$g''(x) = -24(2t_1 - x) - 24(2t_2 - x) - ... - 24(2t_\nu - x) = -24\left(2\sum\limits_{i=1}^{\nu}t_i - \nu x\right)$, οπότε

$g''(6\overline{x}) = -24\left(2\sum\limits_{i=1}^{\nu}t_i - 6\nu\overline{x}\right) \overset{\text{υπόθ.}}{\Leftrightarrow} -24\left(2\sum\limits_{i=1}^{\nu}t_i - 6\nu\overline{x}\right) = 192 \Leftrightarrow 2\sum\limits_{i=1}^{\nu}t_i - 6\nu\overline{x} = -8 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{\nu}t_i - 3\sum\limits_{i=1}^{\nu}t_i = -4 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{\nu}t_i = 2$

γ) Από β) ερώτημα είναι

$g''(x) = -24\left(2\sum\limits_{i=1}^{\nu}t_i - \nu x\right)$. Έτσι αν $g''(x) = 0$, τότε $-24\left(2\sum\limits_{i=1}^{\nu}t_i - \nu x\right) = 0 \Leftrightarrow$

$2\sum\limits_{i=1}^{\nu}t_i - \nu x = 0 \Leftrightarrow x = 2\frac{\sum\limits_{i=1}^{\nu}t_i}{\nu} \Leftrightarrow x = 2\overline{x}$ και αν $g''(x) > 0$, τότε $-24\left(2\sum\limits_{i=1}^{\nu}t_i - \nu x\right) > 0 \Leftrightarrow$

$2\sum\limits_{i=1}^{\nu}t_i - \nu x < 0 \Leftrightarrow x > 2\frac{\sum\limits_{i=1}^{\nu}t_i}{\nu} \Leftrightarrow x > 2\overline{x}$. Επομένως:

Η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $[2\overline{x}, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2\overline{x}]$, άρα παρουσιάζει

ελάχιστο στο $x_0 = 2\overline{x}$ το $g'(2\overline{x}) \overset{\alpha)}{=} 48\nu s^2$. Από υπόθεση όμως ισχύουν: ακρότατη τιμή ίση με 90, άρα

$48\nu s^2 = 90$, (2) και $s = \frac{1}{4}$, οπότε από (2): $48\nu\frac{1}{16} = 90 \Leftrightarrow \nu = 30$

δ) Είναι $g'(x) = 12(2t_1 - x)^2 + 12(2t_2 - x)^2 + ... + 12(2t_\nu - x)^2$, που για x=0 γίνεται:

$g'(0) = 12 \cdot 4t_1^2 + 12 \cdot 4t_2^2 + ... + 12 \cdot 4t_\nu^2 = 48\sum\limits_{i=1}^{\nu}t_i^2$, (3)

Ακόμη $g''(x) = -24(2t_1 - x) - 24(2t_2 - x) - ... - 24(2t_\nu - x)$, που για x=0 γίνεται:

$g''(0) = -48t_1 - 48t_2 - ... - 48t_\nu = -48\sum\limits_{i=1}^{\nu}t_i \overset{\beta)}{=} -48 \cdot 2 = -96$, (4)

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο $M(0, g'(0))$ είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$, με $\alpha = g''(0)$ και επειδή το $M \in$ ε, θα ισχύει $g'(0) = \alpha.0 + \beta \Leftrightarrow \beta = g'(0)$

Οπότε η ε θα έχει εξίσωση $y = g''(0)x + g'(0)$, που λόγω των (3), (4) γίνεται: $y = -96x + 48\sum\limits_{i=1}^{\nu}t_i^2$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΒΙΛΧΕΛΜ ΦΡΙΝΤΡΙΧ ΜΠΕΣΕΛ (1784-1846)

Γερμανός μαθηματικός, θεμελιωτής της αστρονομίας ως επιστήμης, αφού υπήρξε ο εφευρέτης της ακριβέστερης για εκείνα τα χρόνια μεθόδου μέτρησης των αστρικών αποστάσεων. Ήδη από τα 15 του χρόνια άρχισε να προσαρμόζει τις εξαιρετικές για την ηλικία του μαθηματικές γνώσεις σε αστρονομικές μελέτες, με πρώτη αυτή της τροχιάς του κομήτη Χάλεϊ, που έτυχε προβεβλημένης δημοσίευσης σε περιοδικό και του έδωσε θέση βοηθού σε αστεροσκοπείο. Λίγο αργότερα, το 1810 συγκεκριμένα, η πρωσική κυβέρνηση ανέθεσε στον 26χρονο Μπέσελ το πρώτο μεγάλο γερμανικό αστεροσκοπείο στο σημερινό Καλίνινγκραντ της Ρωσίας. Τον ίδιο χρόνο διορίστηκε καθηγητής αστρονομίας στο πανεπιστήμιο της πόλης. Από τις θέσεις αυτές ο Μπέσελ άρχισε να παρατηρεί 3.222 αστέρες και να κάνει διορθώσεις στα μέχρι τότε σφάλματα ατμοσφαιρικής διάθλασης, μετάπτωσης, κλόνισης και αποπλάνησης. Σπουδαία ήταν η ανακάλυψή του σχετικά με τη μεταβολή των ιδίων κινήσεων του Σείριου και του Προκυνός. Στο διάστημα 1821-1833 ο Γερμανός μαθηματικός και αστρονόμος κατάφερε να προσδιορίσει τις θέσεις περίπου 75.000 αστέρων. Όλες τις παρατηρήσεις του τις δημοσίευσε σε πολύτομο έργο. Έργο άφησε και στα μαθηματικά με τη μελέτη μιας ιδιαίτερης τάξης συναρτήσεων μηχανικής.