ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΤΑΣΟΣ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΥΡΙΑΖΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΟΡΙΛΗΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ

"Στη κανονική (ή περίπου) κατανομή ισχύουν: R≃6s και $\bar{x}$=δ, όπου R το εύρος, s η τυπική απόκλιση, $\bar{x}$ η μέση τιμή και δ η διάμεσος ενός δείγματος τιμών μιας μεταβλητής X.

## ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

**Θέμα 1°**

Δίνεται ένα δείγμα μεγέθους ν, $\nu \in \mathbb{N}^*$, του οποίου οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$ ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x}$, τυπική απόκλιση s και συντελεστή μεταβολής CV=12,5%. Αν η μικρότερη τιμή του δείγματος είναι το 14 και επιπλέον ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 = \frac{65}{2}\sum_{i=1}^{\nu} x_i - 195\nu,$$

τότε:

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s του δείγματος.

β) Να υπολογίσετε κατά προσέγγιση το εύρος καθώς και τη διάμεσο του δείγματος.

γ) Να προσδιορίσετε το μέγεθος ν του δείγματος όταν το πλήθος των παρατηρήσεων που ξεπερνούν το 21 είναι ίσο με 840.

δ) Για $\nu = 1000$, να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες του 30.

Δίνεται: $s^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}{\nu}\right]$.

**Λύση**

α) Έχουμε CV = 12,5% $\Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}}100 = 12,5 \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = \frac{12,5}{100} \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \bar{x} = 8s$ (1).

Επίσης $s^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}{\nu}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} - \bar{x}^2$ (2).

Διαιρώντας τη δοσμένη σχέση με ν, παίρνουμε: $\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} = \frac{65}{2}\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu} - 195 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} = \frac{65}{2}\bar{x} - 195$ (3).

Αντικαθιστώντας τις (1) και (3) στην (2) βρίσκουμε:

$s^2 = \frac{65}{2}8s - 195 - (8s)^2 \Leftrightarrow s^2 = 260s - 195 - 64s^2 \Leftrightarrow 65s^2 - 260s + 195 = 0 \Leftrightarrow s^2 - 4s + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s = 1$ ή $s = 3$.

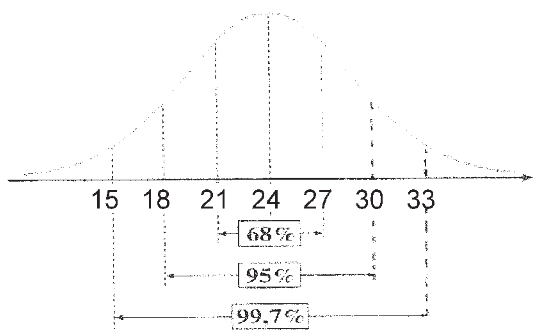
- Αν $s = 1$ τότε $\bar{x} = 8$.
- Αν $s = 3$ τότε $\bar{x} = 24$.

Η περίπτωση $\bar{x} = 8$ απορρίπτεται γιατί $8 < 14$ (όπως γνωρίζουμε η μέση τιμή περιέχεται μεταξύ της μεγαλύτερης και της μικρότερης παρατήρησης του δείγματος). Συνεπώς $s = 3$ και $\bar{x} = 24$.

β) Το εύρος R στην κανονική κατανομή ισούται περίπου με 6s, άρα $R \simeq 18$.
Γνωρίζουμε πως στην κανονική κατανομή το 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες ή ίσες της μέσης τιμής και το 50% μεγαλύτερες ή ίσες της μέσης τιμής. Τότε προφανώς η διάμεσος συμπίπτει με τη μέση τιμή, άρα $\delta = \bar{x} = 24$.

γ) Απεικονίζοντας γραφικά τις συχνότητες (κανονική κατανομή), έχουμε το διπλανό σχήμα στο οποίο:
Παρατηρούμε ότι το ποσοστό των παρατηρήσεων που ξεπερνούν το 21 είναι: $50\% + \frac{68}{2}\% = 84\%$.

Άρα έχουμε $\nu = \frac{840 \cdot 100}{84} = 1000$.




δ) Μεγαλύτερες του 30 είναι σε ποσοστό το $50\% - \frac{95}{2}\% = 2,5\%$ των παρατηρήσεων του δείγματος.

Επομένως το ζητούμενο πλήθος των παρατηρήσεων είναι $\frac{2,5}{100} \cdot 1000 = 25$.

**Θέμα 2°**

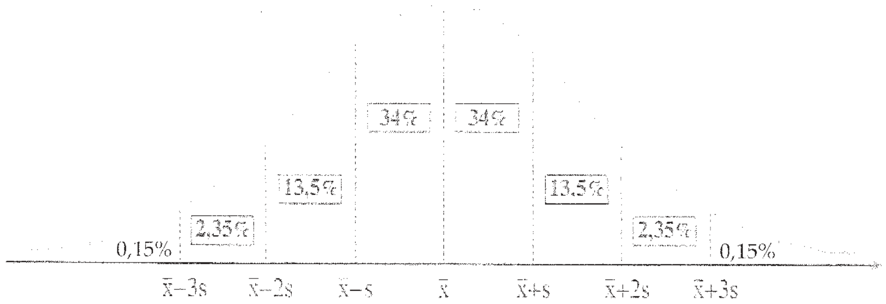
Υποθέτουμε ότι ένα δείγμα είναι ομοιογενές και οι τιμές του ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s. Επιπλέον θεωρούμε ότι το 81,5% των τιμών του δείγματος περιέχεται στο διάστημα (16, 22), όπου 16 και 22 είναι κάποιες από τις χαρακτηριστικές τιμές $\bar{x} - 3s$, $\bar{x} - 2s$, $\bar{x} - s$, $\bar{x}$, $\bar{x} + s$, $\bar{x} + 2s$, $\bar{x} + 3s$.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s του δείγματος.
β) Αν το μέγεθος του δείγματος είναι 4000 να βρείτε το πλήθος των τιμών που ξεπερνούν το 22.
γ) Για μια τιμή x του δείγματος που επιλέγεται τυχαία, να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

- Α: $14 < x < 16$
- Β: $x < 18$ ή $x > 26$
- Γ: $20 < x < 24$

**Λύση**

α) Υπολογίζοντας τα ποσοστά των τιμών του δείγματος στα έξι επιμέρους διαστήματα έχουμε το επόμενο διάγραμμα συχνοτήτων.




Από το διάγραμμα συχνοτήτων της κανονικής κατανομής προκύπτει ότι υπάρχουν δύο επιλογές για τα διαστήματα που περιέχεται το 81,5% των τιμών του δείγματος. Αυτές είναι τα $(\bar{x}-2s, \bar{x}+s)$, $(\bar{x}-s, \bar{x}+2s)$.
Επομένως πρέπει να επιλύσουμε τα παρακάτω συστήματα:

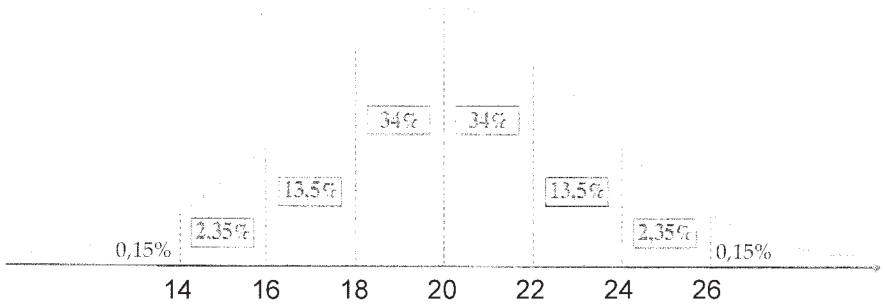
$$\begin{cases}\bar{x}-2s=16\\ \bar{x}+s=22\end{cases} \quad (1) \quad \text{και} \quad \begin{cases}\bar{x}-s=16\\ \bar{x}+2s=22\end{cases} \quad (2)$$

Από την επίλυσή τους καταλήγουμε για το (1) $\begin{cases}\bar{x}=20\\ s=2\end{cases}$ και για το (2) $\begin{cases}\bar{x}=18\\ s=2\end{cases}$

Υπολογίζουμε τον CV ( στις δύο περιπτώσεις) και έχουμε: $CV_1=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{20}=0{,}1$ , $CV_2=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{18}\simeq 0{,}111$,

οπότε είναι προφανές ότι το πρώτο δείγμα είναι ομοιογενές $(CV_1 \leq 0{,}1)$.
Άρα $\bar{x}=20$ και $s=2$.

β) Τοποθετώντας τις τιμές στο διάγραμμα συχνοτήτων έχουμε:




Παρατηρούμε ότι το 16% των τιμών του δείγματος ξεπερνά το 22, συνεπώς το πλήθος τους είναι:
$\frac{16}{100}4000=640$.

γ) Οι ζητούμενες πιθανότητες είναι ίσες με τα ποσοστά των τιμών που βρίσκονται στα αντίστοιχα διαστήματα. Έτσι:

- Το διάστημα (14, 16) είναι το $(\bar{x}-3s, \bar{x}-2s)$ όπου το ποσοστό των τιμών στο διάστημα αυτό είναι 2,35%. Άρα P(A) = 0,0235.
- Το ποσοστό των τιμών που είναι μικρότερες από 18, δηλαδή μικρότερες από $\bar{x}-s$ είναι 16% και το ποσοστό των τιμών που είναι μεγαλύτερες από 26 δηλαδή μεγαλύτερες από $\bar{x}+3s$ είναι 0,15%. το ποσοστό των τιμών που είναι μικρότερες από 18 ή μεγαλύτερες από 26 είναι 16,15%.Επομένως P(B) = 0,1615.
- Το διάστημα (20, 24) είναι το $(\bar{x}, \bar{x}+2s)$ όπου το ποσοστό των τιμών στο διάστημα αυτό είναι 47,5%. Άρα P(Γ) = 0,475.

## ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

### ΓΚΑΜΠΡΙΕΛ ΚΡΑΜΕΡ (1704-1752)

Ελβετός μαθηματικός, συμπατριώτης και συνομήλικος του μεγάλου Λέοναρντ Όιλερ. Γεννήθηκε στη Γενεύη την εποχή που πέθαινε ένας ακόμη σπουδαίος Ελβετός μαθηματικός, ο Γιάκομπ Μπερνούλι. Έμελε, πάντως, να εργαστεί στις εκδόσεις του αδελφού του, Γιόχαν Μπερνούλι, που επίσης ήταν μαθηματικός. Ο Γκάμπριελ Κραμέρ έδειξε από νωρίς την κλίση του στις μαθηματικές επιστήμες, όταν σε ηλικία μόλις 18 ετών κατάφερε να βραβευτεί σε «ντοκτορά» αλγεβρικής μελέτης του ήχου. Στα 20 μάλιστα έγινε ακαδημαϊκός. Όλο το χρόνο της σύντομης ζωής του κινήθηκε μεταξύ Λονδίνου, όπου συνεργάστηκε με τους Χάλεϊ-Στέρλινγκ, Αγίας Πετρούπολης, όπου συνεργάστηκε με τον έτερο μεγάλο Μπερνούλι, τον Ντάνιελ., Παρισιού, όπου συνεργάστηκε με τους Φοντενέλ-Μπουφόν-Κλερό, Βερολίνου από την Ακαδημία του οποίου τιμήθηκε και φυσικά Ελβετίας, όπου συνεργάστηκε (στη Βασιλεία) με τον Όιλερ. Η μεγάλη συμβολή του στα μαθηματικά συνίσταται στην ανακάλυψη που έκανε με απόδειξη ενός κανόνα για τη λύση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων με «εγγράμματους» συντελεστές. Η φόρμουλα Κραμέρ έθεσε τα θεμέλια της θεωρίας των οριζουσών. Ο Ελβετός μαθηματικός δημοσίευσε επίσης σημαντικές μελέτες γύρω από τη θεωρία των αλγεβρικών καμπυλών «ανωτέρας τάξεως», συμπεριλαμβανομένων και των ιδιαζόντων σημείων και των κλάδων. Πέθανε στην κωμόπολη Μπανιόλ κοντά στη Νιμ της Γαλλίας, στο ξεκίνημα μιας περιοδείας, την οποία αποφάσισε παρά το «καμπανάκι» του γιατρού του για προσοχή στην κλονισμένη από τη σκληρή επί μακρύ διάστημα δουλειά υγεία του...