ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΤΑΣΟΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΖΑΜΠΕΛΗΣ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ
ΝΙΚΟΣ ΖΑΧΟΠΟΥΛΟΣ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΥΡΙΑΖΗΣ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΔΙΟΛΙΤΣΗΣ

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ-ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ (ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ)

Θέμα 1°

Οι τιμές (σε χιλιάδες €) ν αυτοκινήτων έχουν ομαδοποιηθεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους και έχουν κατανεμηθεί ομοιόμορφα σε κάθε μία από αυτές. Αν $\nu_3 = \nu_5$ και η διάμεσος δ των τιμών είναι το άνω άκρο της δεύτερης κλάσης, τότε:

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις [-,-)	Κέντρα κλάσεων x_i	ν_i	N_i	f_i	$F_i\%$
-			15		
-					
-	33				
-				0,15	
[-,-]	45		120		
Σύνολο					

β) Πόσα αυτοκίνητα κοστίζουν λιγότερο από 34 χιλιάδες €;

γ) Σε ποιο διάστημα κυμαίνεται η τιμή των 30 ακριβότερων αυτοκινήτων;

δ) Ποια η πιθανότητα ένα αυτοκίνητο να κοστίζει από 40 έως 48 χιλιάδες €;

Λύση

α) Οι κλάσεις είναι της μορφής [α, α + c), [α + c, α + 2c), … όπου c το πλάτος αυτών. Επομένως θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{(\alpha+2c)+(\alpha+3c)}{2}=33 \quad \text{και} \quad \frac{(\alpha+4c)+(\alpha+5c)}{2}=45$$

(αφού τα κέντρα x_i των κλάσεων είναι $x_3 = 33$ και $x_5 = 45$).

Έτσι έχουμε το σύστημα $\begin{cases}2\alpha+5c=66\\2\alpha+9c=90\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha+5c=66\\4c=24\end{cases}$, άρα c = 6 και α = 18

επομένως οι κλάσεις είναι: [18, 24), [24, 30), [30, 36), [36, 42) και [42, 48].

Ακόμη $\nu = N_5 = 120$ και $\nu_3 = \nu_5, \nu_1 = N_1 = 15$.

Είναι δ = 30 (άνω άκρο δεύτερης κλάσης), άρα θα ισχύει $\nu_1 + \nu_2 = \frac{\nu}{2} \Leftrightarrow 15 + \nu_2 = 60 \Leftrightarrow \nu_2 = 45$ όπως και

$f_4 = 0{,}15 \Leftrightarrow \frac{\nu_4}{\nu} = 0{,}15 \Leftrightarrow \nu_4 = 0{,}15\nu \Leftrightarrow \nu_4 = 0{,}15 \cdot 120 \Leftrightarrow \nu_4 = 18$.

Επίσης ισχύει $\nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = \frac{\nu}{2} \Leftrightarrow 2\nu_3 + 18 = 60 \Leftrightarrow \nu_3 = 21 = \nu_5$ και από τις σχέσεις για τις σχετ. συχνότητες, αθροιστικές (απόλυτες-σχετ.) $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$, $N_i = N_{i-1} + \nu_i$, $F_i\% = F_{i-1}\% + f_i\%$ κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις [-,-)	Κέντρα κλάσεων x_i	ν_i	N_i	f_i	$F_i\%$
[18, 24)	21	15	15	0,125	12,5
[24, 30)	27	45	60	0,375	50
[30, 36)	33	21	81	0,175	67,5
[36, 42)	39	18	99	0,15	82,5
[42, 48]	45	21	120	0,175	100
Σύνολο		120		1	

β) Το ζητούμενο πλήθος των αυτοκινήτων θα είναι $\nu_1 + \nu_2 + \frac{2\nu_3}{3} = 15 + 45 + 14 = 74$, αφού το εύρος από 30 έως 34 χιλ.€ καλύπτει τα $\frac{2}{3}$ της τρίτης κλάσης η οποία έχει συχνότητα $\nu_3 = 21$.

γ) Τα 30 ακριβότερα αυτοκίνητα θα βρίσκονται στο διάστημα [39, 48) αφού τα 9 από τα 18 αυτοκίνητα της κλάσης [36, 42) (δηλαδή αντιστοιχία στο μέσο της κλάσης) και τα 21 αυτοκίνητα της κλάσης [42, 48] (σύνολο 30), αποτελούν τα ακριβότερα αυτών.

δ) Η ζητούμενη πιθανότητα ένα αυτοκίνητο να κοστίζει από 40 έως 48 χιλ.€ είναι:

$\frac{1}{3}f_4 + f_5 = \frac{1}{3}\cdot 0{,}15 + 0{,}175 = 0{,}225$ αφού, οι τιμές των αυτοκινήτων μεγαλύτερες των 40 χιλ.€ καλύπτονται από το $\frac{1}{3}$ της κλάσης [36, 42) με $f_4 = 0{,}15$ και ολόκληρη την τελευταία κλάση [42, 48] με $f_5 = 0{,}175$.

Θέμα 2°

Έστω $t_1, t_2, \dots, t_\nu$ οι τιμές μιας μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x-t_1)^3 + (x-t_2)^3 + \dots + (x-t_\nu)^3, x \in \mathbb{R}$ για την οποία $f''(4\bar{x}) = 90$.

- Αν οι κλάσεις σε ομαδοποιημένες παρατηρήσεις είναι της μορφής: [α, α + c), [α + c, α + 2c), … όπου c το πλάτος αυτών, τότε: $\frac{(\alpha+(i-1)c)+(\alpha+ic)}{2} = x_i, i = 1,2,\dots$
- Αν $t_1, t_2, \dots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις ενός δείγματος μεγέθους ν μιας μεταβλητής Χ, τότε για τη μέση τιμή $\overline{x^\kappa}$ των $t_1^\kappa, t_2^\kappa, \dots, t_\nu^\kappa$ ισχύει: $\overline{x^\kappa} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^\kappa}{\nu}, \kappa = 1,2,\dots$

α) Να δείξετε ότι $s^2 = \frac{1}{3\nu} f'(\bar{x})$.

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{i=1}^{\nu} t_i$.

γ) Να δείξετε ότι $s^2 + \bar{x}^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2$.

δ) Αν η εφαπτομένη ε της C_f στο $A(0, f(0))$ έχει εξίσωση $y = 45(s^2 + \bar{x}^2)x - 2010$, να υπολογίσετε τις τιμές των $\bar{x}$ και $\overline{x^3}$.

Λύση

α) Η f ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3(x - t_1)^2 + 3(x - t_2)^2 + \ldots + 3(x - t_\nu)^2 = 3\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - x)^2$,

οπότε $f'(\bar{x}) = 3\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2$ και επομένως $s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2 \Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{3\nu} f'(\bar{x})$.

β) Η f' είναι πολυωνυμική, άρα $f''(x) = 6(x - t_1) + 6(x - t_2) + \ldots + 6(x - t_\nu) = 6\sum_{i=1}^{\nu}(x - t_i)$.

Είναι

$$f''(4\bar{x}) = 6\sum_{i=1}^{\nu}(4\bar{x} - t_i) = 6\left(4\nu\bar{x} - \sum_{i=1}^{\nu} t_i\right) = 24\nu\bar{x} - 6\sum_{i=1}^{\nu} t_i = 24\sum_{i=1}^{\nu} t_i - 6\sum_{i=1}^{\nu} t_i = 18\sum_{i=1}^{\nu} t_i.$$

Όμως,

$$f''(4\bar{x}) = 90 \Leftrightarrow 18\sum_{i=1}^{\nu} t_i = 90 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\nu} t_i = 5.$$

γ) Από τον τύπο της διασποράς $s^2 = \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu}\right)$, έχουμε $s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu}\right)^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - (\bar{x})^2$,

άρα $s^2 + (\bar{x})^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2$

δ) Είναι $f(x) = (x - t_1)^3 + (x - t_2)^3 + \ldots + (x - t_\nu)^3, x \in \mathbb{R}$, που για x=0 γίνεται $f(0) = (-t_1)^3 + (-t_2)^3 + \ldots + (-t_\nu)^3$, άρα $f(0) = -\sum_{i=1}^{\nu} t_i^3, (1)$. Ακόμη από α) ισχύει $f'(x) = 3\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - x)^2$, που για x=0 γίνεται $f'(0) = 3\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2, (2)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο $A(0, f(0))$ είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$ με $\alpha = f'(0)$

και επειδή το $A \in \varepsilon$ θα ισχύει $f(0) = \alpha.0 + \beta \Leftrightarrow \beta = f(0)$.

Οπότε η ε θα έχει εξίσωση $y = f'(0)x + f(0)$ που λόγω των (1), (2) γίνεται:

$$y = \left(3\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2\right)x - \sum_{i=1}^{\nu} t_i^3 \Leftrightarrow y = 3\nu(s^2 + \bar{x}^2)x - \sum_{i=1}^{\nu} t_i^3, (3).$$

Όμως η ε δίνεται (υπόθεση) με εξίσωση $y = 45(s^2 + \bar{x}^2)x - 2010$ (4).

Λόγω των (3), (4) παίρνουμε τις σχέσεις:

$$3\nu(s^2 + \bar{x}^2) = 45(s^2 + \bar{x}^2) \underset{\bar{x}\neq 0}{\overset{s\neq 0}{\Leftrightarrow}} \nu = 15 \text{ και } \sum_{i=1}^{\nu} t_i^3 = 2010, \text{ έτσι } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{15} t_i}{15} \overset{\beta)}{=} \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \text{ και } \overline{x^3} = \frac{\sum_{i=1}^{15} t_i^3}{15} = \frac{2010}{15} = 134.$$

ΚΑΡΛ ΦΡΙΝΤΡΙΧ ΓΚΑΟΥΣ (1777-1855)

Γερμανός μαθηματικός και αστροφυσικός, από τις κορυφαίες επιστημονικές φυσιογνωμίες όλων των εποχών, αφού θεωρείται ο θεμελιωτής των μαθηματικών της σύγχρονης εποχής. Αν και γιος κηπουρού από τα κολεγιακά του χρόνια είχε κιόλας αφομοιώσει τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς και τα κλασικά έργα των Νιούτον, Όιλερ και Λαγκράνζ. Αστειευόμενος έλεγε «πρώτα έμαθα να υπολογίζω και μετά να μιλάω». Στο πρώτο μεγάλο και μνημειώδες επιστημονικό του έργο με τίτλο «Αριθμητικές έρευνες» (1801) ο Γκάους περιλαμβάνει και το λεγόμενο «χρυσό θεώρημα», που σήμερα ονομάζεται νόμος της τετραγωνικής αντιστροφής. Ολόκληρο, πάντως, το έργο θεωρείται η ληξιαρχική πράξη γέννησης της σύγχρονης αριθμοθεωρίας. Σε όλα τα γνωστά θεωρήματα της εποχής κατάφερε να δώσει και τη «γεωμετρική τους κατεύθυνση». Όταν λίγο αργότερα ο Γκάους ασχολήθηκε με τους υπολογισμούς των αστεροειδών, τότε θεμελίωσε και την καθοριστική για τις μετέπειτα διαστημικές ανακαλύψεις πιθανοθεωρία και το νόμο της κανονικής κατανομής (γνωστή ως «κατανομή Γκάους»). Η φήμη του τον κατέστησε περιζήτητο καθηγητή στα καλύτερα πανεπιστήμια της Ευρώπης αλλά εκείνος δεν σταμάτησε να ερευνά. Νέο του επίτευγμα η θεμελίωση της διαφορικής γεωμετρίας και το «έξοχο» όπως ονομάστηκε θεώρημα του για την καμπυλότητα των επιφανειών. Η «συμφυής γεωμετρία», που επινόησε, άνοιξε το δρόμο στη γεωμετρία Ρίμανν και την τανυστική ανάλυση, που με τη σειρά της πρόσφερε το μαθηματικό υπόβαθρο στη θεωρία Αϊνστάιν.