ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ
ΝΙΚΟΣ ΖΑΧΟΠΟΥΛΟΣ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ

Για μια συνάρτηση f, ορισμένη στο σύνολο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, ισχύουν:

- $\int f(x)\,dx = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$, με F παράγουσα της f στο Δ
- $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$
- $\int f'(x)\,dx = f(x) + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}$

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Θέμα 1^{ο}

Έστω συνάρτηση $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη τέτοια ώστε $\frac{3}{7}f'(x)=\frac{1}{1+6e^{-f(x)}}$, για κάθε $x\in[2,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $f'(2)=\frac{1}{3}$

i) Να υπολογίσετε την τιμή $f(2)$ και να βρείτε το πρόσημο των τιμών της f

ii) Να δείξετε ότι ισχύει $6e^{-f(x)}=f(x)-\left(\frac{7x-32}{3}\right)$, για κάθε $x\in[2,+\infty)$ και να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

iii) Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-\frac{7}{3}x^2+2x^2ημ\frac{5}{x}}{f(x)-9συνx+3x}$

Λύση

i) Στην $\frac{3}{7}f'(x)=\frac{1}{1+6e^{-f(x)}}$ θέτουμε x = 2 και έχουμε: $\frac{3}{7}f'(2)=\frac{1}{1+6e^{-f(2)}}\Leftrightarrow 3f'(2)+18e^{-f(2)}f'(2)=7\overset{f'(2)=\frac{1}{3}}{\Leftrightarrow}$ $1+6e^{-f(2)}=7\Leftrightarrow f(2)=0$. Είναι $f'(x)=\frac{7}{3}\left(\frac{1}{1+6e^{-f(x)}}\right)>0$, για κάθε $x\geq 2$ και f συνεχής στο [2, +∞), επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο [2, +∞). Συνεπώς f(2) = 0 και για κάθε x > 2, έχουμε f(x) > f(2) ⇔ f(x) > 0

ii) Για $x\geq 2$ είναι $\frac{3}{7}f'(x)=\frac{1}{1+6e^{-f(x)}}\Leftrightarrow 3f'(x)+18f'(x)e^{-f(x)}=7\Leftrightarrow 3f'(x)=7-18f'(x)e^{-f(x)}$

άρα $\int(3f(x))'\,dx=\int\left(7-18f'(x)e^{-f(x)}\right)dx\Leftrightarrow 3f(x)+c_1=7x+18e^{-f(x)}+c_2$, (1), με $c_1, c_2\in\mathbb{R}$

Στην (1) θέτουμε $c_1-c_2=c$ και έχουμε: $3f(x)-7x+c=18e^{-f(x)}$, $c\in\mathbb{R}$, (2)

Όμως f(2) = 0, επομένως, η (2) για x = 2 γίνεται $3f(2)-14+c=18e^{-f(2)}\Leftrightarrow -14+c=18\Leftrightarrow c=32$

Άρα για κάθε $x\geq 2$ ισχύει: $3f(x)-7x+32=18e^{-f(x)}\Leftrightarrow 6e^{-f(x)}=f(x)-\left(\frac{7x-32}{3}\right)$

Για $x\geq 2$, ισχύει $\frac{3}{7}f'(x)=\frac{1}{1+6e^{-f(x)}}$, επομένως η f' είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο [2, +∞) $\left(e^{-f(x)}\right.$: παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\left.f(x), e^{-x}\right)$

Συνεπώς για x ≥ 2 έχουμε: $f''(x)=\frac{7}{3}\left(\frac{1}{1+6e^{-f(x)}}\right)'=\frac{7}{3}\left(-\frac{-6e^{-f(x)}f'(x)}{\left(1+6e^{-f(x)}\right)^2}\right)=14\left(\frac{e^{-f(x)}f'(x)}{\left(1+6e^{-f(x)}\right)^2}\right)>0$ (αφού από i) ερώτημα $f'(x)>0$). Οπότε η συνεχής συνάρτηση f στο [2, +∞) είναι κυρτή.

iii) Από ii) ερώτ. είναι $6e^{-f(x)}=f(x)-\left(\frac{7x-32}{3}\right)$ για $x\geq 2$, επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{7}{3}x-\frac{32}{3}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}6e^{-f(x)}=0$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-f(x)}=0$. Έτσι η ευθεία $y=\frac{7}{3}x-\frac{32}{3}$ είναι η πλάγια ασύμπτ. της C_f στο +∞

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-\frac{7}{3}x^2+2x^2ημ\frac{5}{x}}{f(x)-9συνx+3x}\overset{x>2}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-\frac{7}{3}x+2xημ\frac{5}{x}}{\frac{f(x)}{x}-9\frac{συνx}{x}+3}=\dfrac{-\frac{32}{3}+2\cdot 5}{\frac{7}{3}-9\cdot 0+3}=-\frac{1}{8}$, αφού:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{7}{3}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{7}{3}x\right)=-\frac{32}{3}$, επειδή $y=\frac{7}{3}x-\frac{32}{3}$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο +∞
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdotημ\frac{5}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}5\dfrac{ημ\frac{5}{x}}{\frac{5}{x}}=\lim\limits_{u\to 0}5\frac{ημu}{u}=5$, με $\frac{5}{x}=u$ και $x\to+\infty\Leftrightarrow u\to 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{συνx}{x}=0$, επειδή $\left|\frac{συνx}{x}\right|\leq\frac{1}{x}\Leftrightarrow -\frac{1}{x}\leq\frac{συνx}{x}\leq\frac{1}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ (κριτήριο παρεμβολής).

Θέμα 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2-\ln\left(2x-\sqrt{4x^2-25}\right)$

Α. Να βρείτε:
 i) Το πεδίο ορισμού Α της f
 ii) Την παράγωγο f' της f και στη συνέχεια να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 iii) Την ασύμπτωτη της C_h της $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ στο $+\infty$

Β. Αν g η συνάρτηση με $g(x)=\sqrt{4x^2-25}$ για $x>\dfrac{5}{2}$ τότε, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

 i) $M=\displaystyle\int\frac{4}{g(x)}dx$, ii) $N=\displaystyle\int g(x)\,dx$

Λύση

Α. i) Η f ορίζεται όταν $4x^2-25\ge 0$ και $2x-\sqrt{4x^2-25}>0$

$4x^2-25\ge 0 \Leftrightarrow x^2\ge\dfrac{25}{4}$ άρα $x\in\left(-\infty,-\dfrac{5}{2}\right]\cup\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$, (1) και $2x-\sqrt{4x^2-25}>0\Leftrightarrow 2x>\sqrt{4x^2-25}$, (2)

- Για $x<0$ η (2) είναι αδύνατη
- Για $x>0$ έχουμε από (2): $4x^2>4x^2-25$, που ισχύει. Επομένως $A=\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$

ii) Για $x>\dfrac{5}{2}$, είναι $f'(x)=-\dfrac{1}{2x-\sqrt{4x^2-25}}\left(2-\dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2-25}}\right)\Leftrightarrow$

$f'(x)=-\dfrac{2}{2x-\sqrt{4x^2-25}}\left(\dfrac{\sqrt{4x^2-25}-2x}{\sqrt{4x^2-25}}\right)$, οπότε $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{4x^2-25}}>0$, για κάθε $x>\dfrac{5}{2}$. Ακόμη η f

είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, άρα είναι γνησίως αύξουσα στο Α.

iii) Για $x>\dfrac{5}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2-\ln\left(2x-\sqrt{4x^2-25}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\ln\dfrac{25}{2x+\sqrt{4x^2-25}}\right)=+\infty$,

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2-25}\right)=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{25}{2x+\sqrt{4x^2-25}}=0$ και $\dfrac{25}{2x+\sqrt{4x^2-25}}>0$

για κάθε $x>\kappa$ όπου $\kappa\in\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$. Συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{25}{2x+\sqrt{4x^2-25}}\right)=-\infty$

Έτσι $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{x'}\overset{A ii)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{4x^2-25}}\right)=0$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-25}=+\infty$

Επομένως η ευθεία y = 0 (ημιάξονας Οx) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$

Β. i) Από ερώτημα Α ii): $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{4x^2-25}}$ άρα $\dfrac{4}{g(x)}=2f'(x)$, και έτσι για $x>\dfrac{5}{2}$ έχουμε

$M=\displaystyle\int\frac{4}{g(x)}dx=2\int f'(x)dx=2f(x)+\mu=2\left[2-\ln\left(2x-\sqrt{4x^2-25}\right)\right]+\mu=-2\ln\left(2x-\sqrt{4x^2-25}\right)+c_1$,

όπου $c_1=\mu+4$, $\mu\in\mathbb{R}$

ii) Για $x>\dfrac{5}{2}$, $N=\displaystyle\int g(x)\,dx=\int\sqrt{4x^2-25}\,dx=\int x'\sqrt{4x^2-25}\,dx=x\sqrt{4x^2-25}-\int x\frac{8x}{2\sqrt{4x^2-25}}dx=$

$x\sqrt{4x^2-25}-\displaystyle\int\frac{4x^2}{\sqrt{4x^2-25}}dx=x\sqrt{4x^2-25}-\int\frac{4x^2-25+25}{\sqrt{4x^2-25}}dx=$

$x\sqrt{4x^2-25}-\displaystyle\int\frac{4x^2-25}{\sqrt{4x^2-25}}dx-\frac{25}{4}\int\frac{4}{\sqrt{4x^2-25}}dx=x\sqrt{4x^2-25}-\int\sqrt{4x^2-25}dx-\frac{25}{4}M=$

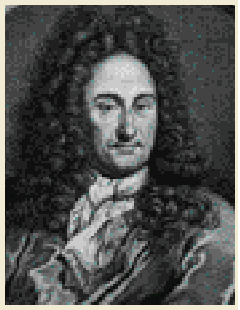
$x\sqrt{4x^2-25}-N-\dfrac{25}{4}M$. Συνεπώς: $N=x\sqrt{4x^2-25}-N-\dfrac{25}{4}M\Leftrightarrow 2N=x\sqrt{4x^2-25}-\dfrac{25}{4}M$

$\Leftrightarrow N=\dfrac{x}{2}\sqrt{4x^2-25}-\dfrac{25}{8}M=\dfrac{x}{2}\sqrt{4x^2-25}-\dfrac{25}{8}\left[-2\ln\left(2x-\sqrt{4x^2-25}\right)+c_1\right]=$

$\dfrac{x}{2}\sqrt{4x^2-25}+\dfrac{25}{4}\ln\left(2x-\sqrt{4x^2-25}\right)+c_2$, με $c_2=-\dfrac{25}{8}c_1$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΓΚΟΤΦΡΕΝΤ ΒΙΛΧΕΛΜ ΦΟΝ ΛΑΪΜΠΝΙΤΣ (1646-1716)



Γερμανός φιλόσοφος και μαθηματικός από τις πλέον πολύπλευρες προσωπικότητες του δυτικού πολιτισμού. Έχει συνδέσει το όνομά του με τα μαθηματικά κυρίως λόγω της επινόησης και οικοδόμησης του απειροστικού λογισμούς (διαφορικού και ολοκληρωτικού). Το επίτευγμα αυτό παρουσιάστηκε σχεδόν ταυτόχρονα από τον Νεύτωνα στην Αγγλία, χωρίς ο ένας να γνωρίζει τι ποιεί ο άλλος!..

Σχετικά με την προτεραιότητα ξέσπασε διαμάχη, η οποία δεν περιορίστηκε μόνο μεταξύ των δυο πρωταγωνιστών αλλά πήρε και εθνικές διαστάσεις. Το σίγουρο είναι ότι οι συμβολισμοί που επινόησε ο Λάιμπνιτς αποδείχτηκαν τότε πιο εύχρηστοι και βοήθησαν σημαντικά στην άνθηση της μαθηματικής παραγωγικότητας.

Η σύλληψη της θεωρίας του Λάιμπνιτς δημοσιεύτηκε από τον ίδιο το 1684 σε ένα 16σέλιδο άρθρο υπό τον ατελείωτο τίτλο «Νέα μέθοδος για μέγιστα και ελάχιστα καθώς και εφαπτόμενες, που δεν εμποδίζεται από κλασματικές και άρρητες ποσότητες, και ένας ιδιαίτερος τρόπος για τον υπολογισμό τους»!