ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΤΑΣΟΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΜΑΡΙΝΗΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΥΡΙΑΖΗΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ

Αν f,g συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β] τότε, το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των C_f, C_g και των ευθειών x=α,x=β είναι : $E=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|dx$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

Θέμα 1°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{1-\ln x}$, $x>e$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Έστω η συνάρτηση $F(x)=\int_3^x \dfrac{f(t)}{t^2\ln^2 t}dt$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F και να εξετάσετε αυτήν ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο.

β) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_F, του άξονα x΄x και των ευθειών $x=3$, $x=e^2$, να δείξετε ότι $E+e^2F(e^2)=\ln\left(\ln\dfrac{3}{e}\right)$

iii) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{F(x)}{\left(\ln\dfrac{3}{x}\right)^2}$

Λύση

i) Για $x>e$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\dfrac{\dfrac{2\ln x}{x}(1-\ln x)+\dfrac{\ln^2 x}{x}}{(1-\ln x)^2}=\dfrac{(2-\ln x)\ln x}{x(1-\ln x)^2}$, οπότε

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=2$ ή $\ln x=0 \Leftrightarrow x=e^2$ ή $x=1$ που απορρίπτεται. Αν $f'(x)>0$ τότε $e<x<e^2$, οπότε: η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(e,e^2]$, γνησίως φθίνουσα στο $[e^2,+\infty)$ (f: συνεχής στο $(e,+\infty)$) και παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=e^2$ το $f(e^2)=-4$. Ακόμη:

- $\lim\limits_{x\to e^+}f(x)=\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{\ln^2 x}{1-\ln x}=\lim\limits_{x\to e^+}\left(\ln^2 x\dfrac{1}{1-\ln x}\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to e^+}\ln^2 x=1$ και $\lim\limits_{x\to e^+}(1-\ln x)=0$ με $1-\ln x<0$ για $x>e$ οπότε $\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{1}{1-\ln x}=-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{1-\ln x}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2\ln x}{x}}{-\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-2\ln x)=-\infty$.

Συνεπώς αν $A=(e,+\infty)$ τότε $f(A)=(-\infty,-4]$.

ii) α) Η συνάρτηση $\dfrac{f(t)}{t^2\ln^2 t}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $(e,+\infty)$ και $3>e$ επομένως πρέπει $x>e$ οπότε η F έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(e,+\infty)$. Η F είναι παραγωγίσιμη στο $(e,+\infty)$ ως αρχική της $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2\ln^2 x}$ με $F'(x)=\dfrac{f(x)}{x^2\ln^2 x}<0$ αφού $x^2\ln^2 x>0$ για $x>e$ και $f(x)<0$ επειδή από ερώτημα i) $f(x)\le -4$ για κάθε $x>e$. Συνεπώς η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(e,+\infty)$.

Είναι $F(3)=0$ και $F(x)>0$ για $x\in(e,3)$ ενώ $F(x)<0$ για $x\in(3,+\infty)$.

β) Για $x\in[3,e^2]$ είναι $F(x)<0$ (ερώτημα ii α)) οπότε

$$E=-\int_3^{e^2}F(x)dx=\int_{e^2}^3 x'F(x)dx=\left[xF(x)\right]_{e^2}^3-\int_{e^2}^3 xF'(x)dx=3F(3)-e^2F(e^2)-\int_{e^2}^3 x\frac{f(x)}{x^2\ln^2 x}dx=$$

$$=-e^2F(e^2)-\int_{e^2}^3\frac{\ln^2 x}{x\ln^2 x(1-\ln x)}dx=-e^2F(e^2)+\int_{e^2}^3\frac{(\ln x-1)'}{\ln x-1}dx=-e^2F(e^2)+\left[\ln(\ln x-1)\right]_{e^2}^3=$$

$$=\ln\left(\ln\frac{3}{e}\right)-e^2F(e^2).$$ Άρα $E+e^2F(e^2)=\ln\left(\ln\dfrac{3}{e}\right)$.

iii) $$\lim_{x\to 3^-}\frac{F(x)}{\left(\ln\frac{3}{x}\right)^2}=\lim_{x\to 3^-}\frac{\int_3^x\frac{f(t)}{t^2\ln^2 t}dt}{\left(\ln\frac{3}{x}\right)^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 3^-}\frac{\frac{f(x)}{x^2\ln^2 x}}{2\ln\frac{3}{x}\cdot\frac{-\frac{3}{x^2}}{\frac{3}{x}}}=\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{2x\ln\frac{3}{x}\cdot(\ln x-1)}=\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{2x(\ln x-1)}\cdot\frac{1}{\ln\frac{3}{x}}=+\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{1}{2x(\ell nx-1)}=\frac{1}{6(\ell n3-1)}>0$ και $\lim\limits_{x\to3^-}\ell n\frac{3}{x}=0$ με $\ell n\frac{3}{x}>0$ για $x<3$ και x «κοντά» στο 3 άρα $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{1}{\ell n\frac{3}{x}}=+\infty$. Οι συναρτήσεις $F(x)$, $f(x)$, $\left(\ell n\frac{3}{x}\right)^2$ των οποίων βρέθηκε το όριο όταν $x\to3^-$ είναι παραγωγίσιμες για x «κοντά» στο 3.

Θέμα 2ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση $f^3(x)+3f(x)=x-4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Α. i) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να προσδιορίσετε την f^{-1}

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$ και τους άξονες x΄x, y΄y

Β. Αν $F(x)=\int_0^x\frac{1}{f^2(t)+1}dt$ να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(0, 2) τέτοιο, ώστε:

i) $F(2)=6f'(\xi)$

ii) $f'(\xi)>\frac{1}{6}E_1$, όπου E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_g με $g(x)=\frac{f(x)}{x-4}$, τους άξονες x΄x, y΄y και την ευθεία x = 2.

Λύση

Α. i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και επομένως από τη σχέση της υπόθεσης έχουμε

$\left(f^3(x)+3f(x)\right)'=(x-4)'$ άρα $3f^2(x)f'(x)+3f'(x)=1\Leftrightarrow 3f'(x)\left(f^2(x)+1\right)=1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{3\left(f^2(x)+1\right)}>0$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε και «1 – 1» δηλαδή αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ στην σχέση της υπόθεσης και έχουμε

$y^3+3y=f^{-1}(y)-4\Leftrightarrow f^{-1}(y)=y^3+3y+4,\ y\in\mathbb{R}$ άρα $f^{-1}(x)=x^3+3x+4,\ x\in\mathbb{R}$.

ii) Είναι $f^{-1}(x)=0\Leftrightarrow x^3+3x+4=0\Leftrightarrow x^3+1+3(x+1)=0\Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)+3(x+1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+4)=0\Leftrightarrow x=-1$ αφού $x^2-x+4>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x\in[-1,0]$ είναι $f^{-1}(x)\geq0$ αφού $x+1\geq0$ άρα (και επειδή f^{-1} συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική)

$$E=\int_{-1}^0 f^{-1}(x)dx=\int_{-1}^0\left(x^3+3x+4\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}+4x\right]_{-1}^0=-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-4\right)=\frac{9}{4}\text{ τ.μ.}$$

Β. i) Από ερώτημα Αi) έχουμε $3f'(x)=\frac{1}{f^2(x)+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα (και επειδή f΄: συνεχής στο $\mathbb{R}$)

$$\int_0^x\frac{1}{f^2(t)+1}dt=\int_0^x3f'(t)dt\Leftrightarrow F(x)=3\left[f(t)\right]_0^x\Leftrightarrow F(x)=3f(x)-3f(0)=3f(x)+3$$

(αφού $f^{-1}(-1)=0\Leftrightarrow f(0)=-1$).

Η F είναι παραγωγίσιμη στο [0, 2] (αφού F(x) = 3f(x) + 3 και f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$) με $F'(x)=3f'(x)$, επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει ξ∈(0, 2) τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi)=\frac{F(2)-F(0)}{2}\Leftrightarrow 3f'(\xi)=\frac{F(2)}{2}\Leftrightarrow F(2)=6f'(\xi)\quad (F(0)=0).$$

ii) Η σχέση $f^3(x)+3f(x)=x-4$ για $x=4$ γίνεται $f^3(4)+3f(4)=0\Leftrightarrow f(4)\left(f^2(4)+3\right)=0$ άρα f(4) = 0.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (Αi)) επομένως $x=4$ είναι μοναδική ρίζα της f(x) = 0 και για $x<4$ θα ισχύει f(x) < 0. Συνεπώς για x∈[0, 2] είναι $g(x)=\frac{f(x)}{x-4}>0$ άρα $E_1=\int_0^2g(x)dx$ (1). Για κάθε $t\in\mathbb{R}$ ισχύει

$\frac{1}{f^2(t)+1}>\frac{1}{f^2(t)+3}$ (2). Όμως $f^3(t)+3f(t)=t-4\Leftrightarrow f(t)\left(f^2(t)+3\right)=t-4\overset{t\in[0,2]}{\Leftrightarrow}\frac{1}{f^2(t)+3}=\frac{f(t)}{t-4}$ (3).

Από (2) για $x\in[0,2]$ θα ισχύει (αφού η φ(t)= $\frac{1}{f^2(t)+1}-\frac{1}{f^2(t)+3}$: συνεχής και θετική)

$$\int_0^2\frac{1}{f^2(t)+1}dt>\int_0^2\frac{1}{f^2(t)+3}dt\overset{(3)}{\Leftrightarrow}\int_0^2\frac{1}{f^2(t)+1}dt>\int_0^2\frac{f(t)}{t-4}dt\Leftrightarrow F(2)>\int_0^2g(t)dt\Leftrightarrow F(2)>E_1\overset{Bi)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 6f'(\xi)>E_1\Leftrightarrow f'(\xi)>\frac{1}{6}E_1.$$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΓΚΕΟΡΓΚ ΚΑΝΤΟΡ (1845-1918)

Σπουδαίος Γερμανός μαθηματικός εβραϊκής καταγωγής, ο δημιουργός της μεγαλοφυούς θεωρίας των συνόλων και ιδιαίτερα των απειροσυνόλων. Το 1867 πήρε το διδακτορικό του δίπλωμα στο Βερολίνο και στη συνέχεια δίδαξε στο Πανεπιστήμιο της Χάλλε. Τα πρώτα δημοσιεύματα, σχετικά με το έργο της ζωής του, τη θεωρία δηλαδή των συνόλων, έγιναν το 1874. Ακολούθησαν πολλές ακόμα μελέτες με τις οποίες ανέπτυξε μια θεωρία για «πληθικούς αριθμούς». Όλες αυτές οι πνευματικές κατασκευές του είχαν ένα φιλοσοφικό υπόβαθρο: την παραδοχή της ύπαρξης «ενεστωτικού απείρου». Οι αντιλήψεις του ήταν σύμφωνες με τις μεσαιωνικές θεολογικές απόψεις, τις οποίες είχε ένθερμα ενστερνιστεί. Τα βασικά έργα του στα οποία ανέπτυξε τη θεωρία του, είναι τα «Θεμέλια μιας γενικής θεωρίας πολλαπλοτήτων» (1883) και η «Συμβολή στη θεμελίωση της υπερπεπερασμένης θεωρίας των συνόλων» (1895-97). Αν και υπήρξαν αρκετοί που αντιτάχθηκαν στις ιδέες του και παρά τις αμφισβητήσεις και διαφωνίες γύρω από το έργο του, που παραμένουν ζωντανές, το σύγχρονο ρεύμα των μαθηματικών χαρακτηρίζεται ως «καντοριανό». Πριν από μερικές δεκαετίες, ψήγματα της καντοριανής θεωρίας περιλήφθηκαν στη σχολική ύλη πολλών κρατών με το βαρύγδουπο τίτλο «Νέα Μαθηματικά».