ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΝΟΥΛΗΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΔΙΟΛΙΤΣΗΣ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ

• Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ (ή $f(x)>0$) για x κοντά στο x_0, τότε:

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$

(ή $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$)

• Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0\in A\subseteq D_f$, όταν ισχύει:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θέμα 1°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{5^x-\kappa\cdot 3^x}{3^x+5^{x+2}}, & x\le 1\\ 2x-1+\eta\mu(x-1)\sigma\upsilon\nu\dfrac{4}{x^2-1}, & x>1\end{cases}$

με $\kappa\in\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Α Να βρείτε:
 i) Τον πραγματικό αριθμό κ
 ii) Το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Β Αν για τη συνάρτηση $g:(-\infty,\alpha)\to(-\infty,\alpha)$, $\alpha<-1$ ισχύει $g(x)\le(x^5+1)f(x)$, για κάθε $x<\alpha$, να δείξετε:

 i) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2x}{3x}=0$

 ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sqrt{g^2(x)-g(x)+4}}{|g(x)-5|}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2x}{3x}\right)=1$

Λύση

Α i) • Για $x>1$, είναι $f(x)=2x-1+\eta\mu(x-1)\sigma\upsilon\nu\dfrac{4}{x^2-1}$. Θα υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\eta\mu(x-1)\sigma\upsilon\nu\dfrac{4}{x^2-1}\right)$

Είναι: $\left|\eta\mu(x-1)\sigma\upsilon\nu\dfrac{4}{x^2-1}\right|=|\eta\mu(x-1)|\left|\sigma\upsilon\nu\dfrac{4}{x^2-1}\right|\le|\eta\mu(x-1)|$ (αφού $\left|\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x^2-1}\right|\le 1$, για κάθε $x>1$),

άρα $\left|\eta\mu(x-1)\sigma\upsilon\nu\dfrac{4}{x^2-1}\right|\le|\eta\mu(x-1)| \Leftrightarrow -|\eta\mu(x-1)|\le\eta\mu(x-1)\sigma\upsilon\nu\dfrac{4}{x^2-1}\le|\eta\mu(x-1)|$

Όμως, $\lim\limits_{x\to1^+}\eta\mu(x-1)=0$, άρα και $\lim\limits_{x\to1^+}|\eta\mu(x-1)|=\lim\limits_{x\to1^+}\left(-|\eta\mu(x-1)|\right)=0$,

επομένως, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής (για $x>1$ κοντά στο 1),

θα έχουμε $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\eta\mu(x-1)\sigma\upsilon\nu\dfrac{4}{x^2-1}\right)=0$. Ακόμη, $\lim\limits_{x\to1^+}(2x-1)=1$, άρα $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1+0=1$

• Για $x\le1$, είναι $f(x)=\dfrac{5^x-\kappa\cdot3^x}{3^x+5^{x+2}}$, άρα $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{5^x-\kappa\cdot3^x}{3^x+5^{x+2}}=\dfrac{5-3\kappa}{3+125}=\dfrac{5-3\kappa}{128}=f(1)$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα είναι συνεχής και στο $x_o=1$, επομένως $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$

Έτσι $\dfrac{5-3\kappa}{128}=1\Leftrightarrow 3\kappa=-123\Leftrightarrow\kappa=-41$

ii) Για $x<1$, είναι $f(x)=\dfrac{5^x+41\cdot3^x}{3^x+5^{x+2}}$, άρα: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5^x+41\cdot3^x}{3^x+5^{x+2}}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{5^x}{3^x}+41\cdot\dfrac{3^x}{3^x}}{\dfrac{3^x}{3^x}+25\cdot\dfrac{5^x}{3^x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\dfrac{5}{3}\right)^x+41}{1+25\left(\dfrac{5}{3}\right)^x}=\dfrac{0+41}{1+25\cdot0}=41$, αφού: $\dfrac{5}{3}>1$, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5}{3}\right)^x=0$

Β i) • Για κάθε $x<\alpha$, $\alpha<-1$, ισχύει $g(x)\le(x^5+1)f(x)$. Για $x<\alpha$, $\alpha<-1$ θεωρούμε $h(x)=(x^5+1)f(x)$,

οπότε έχουμε $g(x)\le h(x)$, (1). Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left((x^5+1)f(x)\right)=-\infty$,

επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=41$ (ερώτ. Aii)) και $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^5+1)=-\infty$, άρα και $h(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,\mu),\mu<\alpha$

Από (1) έχουμε: $\dfrac{1}{g(x)}\ge\dfrac{1}{h(x)}$ και $\dfrac{1}{g(x)}<0$ (υπόθεση), άρα $\dfrac{1}{h(x)}\le\dfrac{1}{g(x)}<0$ με $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{h(x)}=0$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$. Έτσι σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής (για $x<\mu<\alpha$), έχουμε:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{g(x)}=0$. Συνεπώς $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{g(x)}}=-\infty$ ($\dfrac{1}{g(x)}<0$ για $x<\mu<\alpha$)

• Ισχύει $\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu2x}{3x}\right|=\dfrac{|\sigma\upsilon\nu2x|}{3|x|}\le\dfrac{1}{3|x|}$ για κάθε $x<\alpha$, άρα $-\dfrac{1}{3|x|}\le\dfrac{\sigma\upsilon\nu2x}{3x}\le\dfrac{1}{3|x|}$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{3|x|}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{3|x|}\right)=0$, οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu2x}{3x}=0$

ii) Για κάθε $x \in (-\infty,\ \mu)$, $\mu < \alpha$ είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{g^2(x)-g(x)+4} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{g^2(x)\left(1-\frac{1}{g(x)}+\frac{4}{g^2(x)}\right)} = +\infty,$$ αφού: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{g(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{g^2(x)} = 0$ (επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ από ερώτ. Β i)) και $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{g^2(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty}|g(x)| = +\infty$. Ακόμη: $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)-5) = -\infty$, άρα $g(x)-5<0$, για $x \in (-\infty,\ \mu), \mu < \alpha$. Έτσι το $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{g^2(x)-g(x)+4}}{|g(x)-5|}$, παρουσιάζει απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$, οπότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{g^2(x)-g(x)+4}}{|g(x)-5|} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{g^2(x)\left(1-\frac{1}{g(x)}+\frac{4}{g^2(x)}\right)}}{5-g(x)} \overset{g(x)<0}{=}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-g(x)\left(\sqrt{1-\frac{1}{g(x)}+\frac{4}{g^2(x)}}\right)}{g(x)\left(\frac{5}{g(x)}-1\right)} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{\sqrt{1-\frac{1}{g(x)}+\frac{4}{g^2(x)}}}{\frac{5}{g(x)}-1} = 1.$$ Τέλος, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{3x} = 0$, θα έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{g^2(x)-g(x)+4}}{|g(x)-5|}+\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{3x}\right) = 1$$

Θέμα 2^{o}

Α Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής για την οποία ισχύουν:

$\lim\limits_{x\to-3}\frac{f(x)}{x+3} = 5$ και $f(3-x) = f(x)$, (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε:

i) την τιμή $f(-3)$

ii) το όριο $\lim\limits_{x\to 6} f(x)$

Β Έστω συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $h(x-\psi) = h(x)-h(\psi)$, για κάθε $x,\psi \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

i) Αν h συνεχής στο $x_0 = 0$, τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

ii) Αν h συνεχής στο $\kappa \neq 0$, τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Λύση

Α i) Για x κοντά στο -3, θέτουμε:

$\frac{f(x)}{x+3} = g(x)$, οπότε $\lim\limits_{x\to-3} g(x) = 5$ και $f(x) = (x+3)g(x)$. Έτσι $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = \lim\limits_{x\to-3}(x+3)g(x) = 0\cdot 5 = 0$

Επειδή όμως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα είναι συνεχής και στο $x_0 = -3$, άρα $f(-3) = \lim\limits_{x\to-3} f(x) = 0$

ii) $\lim\limits_{x\to 6} f(x) \overset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to 6} f(3-x)$. Για το $\lim\limits_{x\to 6} f(3-x)$, θέτουμε $3-x = t$ (για x κοντά στο 6), οπότε: $x = 3-t$ και $x\to 6 \Leftrightarrow t\to -3$. Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = \lim\limits_{x\to 6} f(3-x) = \lim\limits_{t\to-3} f(t) = f(-3) \overset{i)}{=} 0$

Β i) Είναι $h(x-\psi) = h(x)-h(\psi)$, που για $x = \psi = 0$, γίνεται $h(0) = h(0)-h(0)$, άρα $h(0) = 0$

Η h συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = h(0) = 0$. Θα δείξουμε ότι η h είναι συνεχής στο τυχαίο $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x)$: Θέτουμε $x = \alpha - u$, άρα $x\to\alpha \Leftrightarrow u\to 0$ και $h(x) = h(\alpha-u) = h(\alpha)-h(u)$, όπως προκύπτει από την σχέση $h(x-\psi) = h(x)-h(\psi)$ για $x = \alpha$, $\psi = u$

Επομένως: $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = \lim\limits_{u\to 0} h(\alpha-u) = \lim\limits_{u\to 0}[h(\alpha)-h(u)] = h(\alpha) - \lim\limits_{u\to 0} h(u) = h(\alpha)-h(0) = h(\alpha)$, άρα $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = h(\alpha)$, δηλαδή η h είναι συνεχής στο $\alpha \neq 0$. Έτσι η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

ii) Η h συνεχής στο $x_0 = \kappa \neq 0$, άρα $\lim\limits_{x\to\kappa} h(x) = h(\kappa)$, (2)

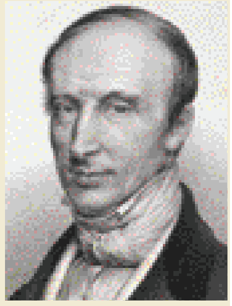
Λόγω του ερωτήματος Β i), αρκεί να δείξουμε ότι η h είναι συνεχής στο $x = 0$

Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$: Θέτουμε $x = \kappa - t$, άρα $x\to 0 \Leftrightarrow t\to\kappa$ και $h(x) = h(\kappa-t) = h(\kappa)-h(t)$, όπως προκύπτει από την σχέση $h(x-\psi) = h(x)-h(\psi)$ για $x = \kappa$, $\psi = t$

Επομένως: $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{t\to\kappa} h(\kappa-t) = \lim\limits_{t\to\kappa}[h(\kappa)-h(t)] = h(\kappa) - \lim\limits_{t\to\kappa} h(t) \overset{(2)}{=} h(\kappa)-h(\kappa) = 0 = h(0)$, άρα $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = h(0)$, δηλαδή η h είναι συνεχής στο $x = 0$. Έτσι η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΛΟΥΙ ΟΓΚΙΣΤΕΝ ΚΟΣΙ (1789-1857)



Ένας από τους σημαντικότερους μαθηματικούς που ανέδειξε η γαλλική σχολή. Οι θεωρίες του πάνω στις αναλυτικές συναρτήσεις και την ελαστικότητα συνέβαλαν αποφασιστικά στην εξέλιξη τόσο των θεωρητικών όσο και των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Συγκαταλέγεται στους κύριους θεμελιωτές της σύγχρονης μαθηματικής επιστήμης. Στη διαρκή εξέλιξή της πολλά θεωρήματα του Κοσί και κυρίως ο ορισμός του ορίου μιας συνάρτησης υπήρξαν σταθμοί. Ο Κοσί έχοντας αποφοιτήσει μόλις στα 21 από την περίφημη Ecole Polytechnique αναζήτησε άμεσα την ακαδημαϊκή καριέρα. Αρχικά δίδαξε μόνο σε ινστιτούτα. Όμως όταν ανταποκρίθηκε με επαγγελματισμό στην οχύρωση λιμενικών έργων που του ανέθεσε ο Ναπολέων Βοναπάρτης ενόψει της βρετανικής απειλής ο Κοσί πήρε πόντους και μαζί… θέση επίκουρου καθηγητή μαθηματικών αναλύσεων. Το 1816 κέρδισε με διαγωνισμό θέση στη Γαλλική Ακαδημία Επιστημών. Βρέθηκε όμως στη δίνη των πολιτικών εξελίξεων της εποχής, εξορίστηκε, περιπλανήθηκε στην Ιταλία (δίδαξε μαθηματική φυσική στο Τορίνο) για να επανέλθει στη Σορβόνη μετά την επανάσταση του 1848. Το έργο που άφησε είναι από τα ογκωδέστερα από μαθηματικό. Αριθμείται σε 789 έγγραφα, 42 τόμους και άρθρα.