ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΤΑΣΟΣ
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΖΑΧΑΡΟΠΟΥΛΟΣ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΥΡΙΑΖΗΣ
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ
ΝΙΚΟΣ ΖΑΧΟΠΟΥΛΟΣ

Διασπορά δείγματος τιμών x_i, $i=1,2,\dots,\kappa$ μεταβλητής X:

$$s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}\nu_i(x_i-\bar{x})^2, \text{ ή}$$

$$s^2=\sum_{i=1}^{\kappa}f_i(x_i-\bar{x})^2,\ \nu\geq\kappa$$

ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

Θέμα 1°

Δίνονται τρία δείγματα $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ως προς μια μεταβλητή Μ. Οι τιμές της μεταβλητής Μ για τα δείγματα είναι:

Για το $\Delta_1 : x_1 = x^4+7,\quad x_2=3x^3-6x^2,\quad x_3=2x+2,\quad x_4=x^2+5$

Για το $\Delta_2 : y_1=2x^4,\quad y_2=-4x^3,\quad y_3=3x,\quad y_4=-2$

Για το $\Delta_2 : z_1=-2x^4,\quad z_2=2x^3-7,\quad z_3=-4x+5,\quad z_4=x^2-8$ με $x\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη μέση τιμή του κάθε δείγματος συναρτήσει του αγνώστου x.

β) Αν η μέση τιμή των μέσων τιμών των δειγμάτων $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ είναι $\bar{\mu}=\frac{1}{12}$ να βρείτε τις τιμές του αγνώστου x.

γ) Για την ακέραια τιμή του x του ερωτήματος β) να υπολογίσετε:
 i) Τις τιμές της μεταβλητής Μ για το κάθε δείγμα.
 ii) Τη μέση τιμή και τη διάμεσο για το κάθε δείγμα.

δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $s_1^2-\left(s_2^2+s_3^2-\frac{3}{16}\right)=0$, όπου $s_1,\ s_2,\ s_3$ οι διακυμάνσεις των δειγμάτων $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ αντίστοιχα των τιμών που προκύπτουν για την ακέραια τιμή του x του ερωτήματος β)

Λύση

α) Για το Δ_1 η μέση τιμή είναι:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=\frac{x^4+7+3x^3-6x^2+2x+2+x^2+5}{4}=\frac{x^4+3x^3-5x^2+2x+14}{4}.$$

Για το Δ_2 η μέση τιμή είναι: $\bar{y}=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}=\frac{2x^4-4x^3+3x-2}{4}.$

Για το Δ_3 η μέση τιμή είναι: $\bar{z}=\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}=\frac{-2x^4+2x^3-7-4x+5+x^2-8}{4}=\frac{-2x^4+2x^3+x^2-4x-10}{4}.$

β) Η ζητούμενη μέση τιμή $\bar{\mu}$ δίνεται από τον τύπο

$$\bar{\mu}=\frac{\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}}{3}=\frac{\frac{x^4+3x^3-5x^2+2x+14}{4}+\frac{2x^4-4x^3+3x-2}{4}+\frac{-2x^4+2x^3+x^2-4x-10}{4}}{3}=$$

$$=\frac{x^4+x^3-4x^2+x+2}{12}.$$

Επειδή $\bar{\mu}=\frac{1}{12}$ προκύπτει ότι

$$\frac{x^4+x^3-4x^2+x+2}{12}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow x^4+x^3-4x^2+x+2=1\Leftrightarrow x^4+x^3-4x^2+x+1=0.$$

Για τη λύση της εξίσωσης χρησιμοποιούμε σχήμα Horner,οπότε η εξίσωση $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$ παίρνει τη μορφή $(x-1)(x^3+2x^2-2x-1)=0$,που με νέο σχήμα Horner στην εξίσωση $x^3+2x^2-2x-1=0$ είναι $x^3+2x^2-2x-1=(x-1)(x^2+3x+1)$. Έτσι $x^4+x^3-4x^2+x+1=0\Leftrightarrow(x-1)^2(x^2+3x+1)=0$.

Οπότε: $(x-1)^2=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$

ή $x^2+3x+1=0$. Είναι Δ = 5, άρα $x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ ή $x=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

γ) Ο ακέραιος x είναι ο αριθμός 1, επομένως:

i) Για το $\Delta_1 : x_1=8,\quad x_2=-3,\quad x_3=4,\quad x_4=6.$
 Για το $\Delta_2 : y_1=2,\quad y_2=-4,\quad y_3=3,\quad y_4=-2.$
 Για το $\Delta_3 : z_1=-2,\quad z_2=-5,\quad z_3=1,\quad z_4=-7.$

ii) $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=\frac{8-3+4+6}{4}=\frac{15}{4},\quad \bar{y}=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}=\frac{2-4+3-2}{4}=-\frac{1}{4},$

$\bar{z}=\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}=\frac{-2-5+1-7}{4}=-\frac{13}{4}.$

Διατάσσουμε τις τιμές των δειγμάτων κατά αύξουσα σειρά, συνεπώς:

Για το $\Delta_1 : -3,\ 4,\ 6,\ 8$ άρα $\delta_1=\frac{4+6}{2}=5.$ Για το $\Delta_2 : -4,\ -2,\ 2,\ 3$ άρα $\delta_2=\frac{-2+2}{2}=0.$

Για το $\Delta_3 : -7,\ -5,\ -2,\ 1$ άρα $\delta_3=\frac{-5-2}{2}=-\frac{7}{2}.$

δ) $s_1^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{4}\left(\frac{27^2}{16}+\frac{1}{16}+\frac{9^2}{16}+\frac{17^2}{16}\right)=\frac{729+1+81+289}{4\cdot16}=\frac{1100}{4\cdot16}=\frac{275}{16}.$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

$$s_2^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(y_i-\bar{y})^2=\frac{1}{4}\left(\frac{15^2}{16}+\frac{7^2}{16}+\frac{9^2}{16}+\frac{13^2}{16}\right)=\frac{225+49+81+169}{4\cdot 16}=\frac{524}{4\cdot 16}=\frac{131}{16}.$$

$$s_3^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(z_i-\bar{z})^2=\frac{1}{4}\left(\frac{15^2}{16}+\frac{7^2}{16}+\frac{5^2}{16}+\frac{17^2}{16}\right)=\frac{225+49+25+289}{4\cdot 16}=\frac{588}{4\cdot 16}=\frac{147}{16}.$$

Άρα $s_1^2-\left(s_2^2+s_3^2-\frac{3}{16}\right)=\frac{275}{16}-\left(\frac{131}{16}+\frac{147}{16}-\frac{3}{16}\right)=\frac{275}{16}-\frac{275}{16}=0.$

Θέμα 2°

Η Ελληνική καρδιολογική εταιρεία μελέτησε την επίδραση ενός νέου φαρμάκου, σχετικού με την αύξηση των καρδιακών παλμών, χορηγώντας το σε ασθενείς με υπόταση. Η αύξηση των παλμών των ασθενών καταχωρήθηκε σε ισοπλατείς κλάσεις στον ακόλουθο πίνακα, που από κάποιο λάθος περιείχε μόνο τα αναφερόμενα στοιχεία.

Παλμοί Κλάσεις	Κέντρο κλάσης x_i	Σχ. συχνότητα f_i	Αθρ. Σχετική F_i	Αθρ. Σχετική% F_i%
[,)	5			
[,)				
[,)				
[,)				
[,)	45			
Σύνολο				

Αν επιπλέον ισχύει $f_1^2-0{,}2f_1+f_4^2-0{,}6f_4+0{,}1\le 0$ και $f_2=f_3=f_5$ τότε:

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) Να βρείτε τη διάμεσο δ του δείγματος.

γ) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση s του δείγματος (Δίνεται $\sqrt{161}\simeq 12{,}7$).

Λύση

α) Αν c το πλάτος της κάθε κλάσης τότε θα ισχύει: 5 + 4c = 45 ⇔ 4c = 40 ⇔ c = 10.
Συνεπώς αν α το αριστερό άκρο της πρώτης κλάσης, τότε προκύπτει:

$$\frac{\alpha+\alpha+c}{2}=5 \Leftrightarrow 2\alpha+10=10 \Leftrightarrow 2\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=0.$$

Άρα οι κλάσεις είναι: [0, 10), [10, 20), [20, 30), [30, 40), [40, 50). Επιπλέον

$f_1^2-0{,}2f_1+f_4^2-0{,}6f_4+0{,}1\le 0 \Leftrightarrow f_1^2-0{,}2f_1+0{,}01+f_4^2-0{,}6f_4+0{,}09\le 0 \Leftrightarrow (f_1-0{,}1)^2+(f_4-0{,}3)^2\le 0.$

Πρέπει $f_1-0{,}1=0$ και $f_4-0{,}3=0$. Άρα $f_1=0{,}1$ και $f_4=0{,}3$.

Έστω $f_2=f_3=f_5=x$,έτσι η $f_1+f_2+f_3+f_4+f_5=1 \Leftrightarrow 0{,}1+x+x+0{,}3+x=1 \Leftrightarrow 3x=0{,}6 \Leftrightarrow x=0{,}2.$

Άρα $f_2=f_3=f_5=0{,}2$. Όσον αφορά τις αθροιστικές συχνότητες έχουμε:

$F_1=f_1=0{,}1,\quad F_2=F_1+f_2=0{,}3,\quad F_3=F_2+f_3=0{,}5,\quad F_4=F_3+f_4=0{,}8$ και $F_5=1$.

Οι αντίστοιχες F_i% προκύπτουν με πολλαπλασιασμό των F_i επί 100.Έτσι ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Παλμοί Κλάσεις	Κέντρο κλάσης x_i	Σχ. συχνότητα f_i	Αθρ. Σχετική F_i	Αθρ. Σχετική% F_i%
[0, 10)	5	0,1	0,1	10
[10, 20)	15	0,2	0,3	30
[20, 30)	25	0,2	0,5	50
[30, 40)	35	0,3	0,8	80
[40, 50)	45	0,2	1	100
Σύνολο	–	1	–	–

β) Από τον πίνακα παρατηρούμε ότι $F_3\%=50$. Το δεξί άκρο της τρίτης κλάσης είναι το 30 συνεπώς η διάμεσος του δείγματος είναι δ =30.

γ) Η μέση τιμή του δείγματος είναι: $\bar{x}=\sum_{i=1}^{5}x_if_i=5\cdot 0{,}1+15\cdot 0{,}2+25\cdot 0{,}2+35\cdot 0{,}3+45\cdot 0{,}2=28$.

Το δείγμα έχει διασπορά $s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5}\nu_i(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{5}\frac{\nu_i(x_i-\bar{x})^2}{\nu}\overset{f_i=\frac{\nu_i}{\nu}}{=}\sum_{i=1}^{5}f_i(x_i-\bar{x})^2=$

$=0{,}1\cdot(5-28)^2+0{,}2\cdot(15-28)^2+0{,}2\cdot(25-28)^2+0{,}3\cdot(35-28)^2+0{,}2\cdot(45-28)^2=161.$

Οπότε η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι $s=\sqrt{161}\simeq 12{,}7$.

ΝΤΑΝΙΕΛ ΜΠΕΡΝΟΥΛΙ (1700-1782)

Σπουδαίος Ελβετός μαθηματικός και φυσικός, γιος και ανηψιός των επίσης διάσημων μαθηματικών Γιόχαν και Γιάκομπ Μπερνούλι αντίστοιχα. Επηρεασμένος από τον πατέρα του που διέπρεψε στον τομέα της ανάπτυξης του απειροστικού λογισμού αλλά και του θείου που συνεισέφερε στην πιθανοθεωρία τους χρήσιμους «αριθμούς του Μπερνούλι», ο Ντανιέλ Μπερνούλι επιδόθηκε στη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων.

Διακρίθηκε στον τομέα αυτό, για την ακρίβεια εντυπωσίασε τον ευρωπαϊκό επιστημονικό κόσμο με συνέπεια να προταθεί για μέλος και στέλεχος διαφόρων Ακαδημιών. Προτίμησε να μεταβεί στη Ρωσία το 1725 και να αναλάβει έργο στην Ακαδημία Επιστημών της Αγίας Πετρούπολης μαζί με τον αδελφό του Νικολάους. Εκεί συναντήθηκε με τον ήδη διάσημο συμπατριώτη του μαθηματικό Όιλερ και δούλεψαν μαζί πάνω στη μαθηματική επιστήμη.

Ο Μπερνούλι επέστρεψε στην Ελβετία το 1738 και ανέλαβε την έδρα των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Βασιλείας. Στο μεταξύ τα παράλληλα ενδιαφέροντά του για τις φυσικές επιστήμες και ιδιαίτερα τη μηχανική που είχαν καλλιεργηθεί στη Ρωσία βρήκαν διέξοδο στο συγκεκριμένο ακαδημαϊκό χώρο, πρόσφεραν στον ίδιο και την έδρα της Φυσικής μέχρι το θάνατό του και την επιστήμη ένα θεμελιώδες για την ανάπτυξη της υδροδυναμικής έργο.